



# 轴对称物体 X 射线层析成像的变分模型与算法

献给徐利治教授 95 华诞

陈柯<sup>①\*</sup>, 魏素花<sup>②</sup>

① Centre for Mathematical Imaging Techniques and Department of Mathematical Sciences, University of Liverpool, Liverpool L69 7ZL, UK;

② 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088  
E-mail: k.chen@liv.ac.uk, wei\_suhua@sina.com

收稿日期: 2015-01-31; 接受日期: 2015-06-15; \* 通信作者

英国国家自然科学基金 (批准号: EP/K036939/1)、国家自然科学基金 (批准号: 10971244 和 11176001) 和中国工程物理研究院 (批准号: 2012A0202006) 资助项目

**摘要** 本文介绍了用 X 射线投影进行轴对称物体密度重建的一些新二维变分模型与其数值计算方法, 从而推广了先前球对称物体密度重建的一维工作. 由于直接解这一类数学模型转化的非线性代数方程组, 数值实现难度大, 本文给出了易实现的增广 Lagrange 解法, 这种方法不仅有利于处理高阶正则化, 而且在 X 光图像有额外模糊的情形下, 自动提供了有用的中间量正则化; 也给出了一些初步的仿真计算结果. 本工作为下一步研究三维非对称物体密度重建打下基础.

**关键词** 层析成像 图像重建 变分模型 正则化 Abel 逆变换

**MSC (2010) 主题分类** 34A55, 47A52, 47J25, 47J30, 94A08

## 1 引言

因为实际应用中的图像都是以矩阵形式给出的, 传统图像处理通常是以统计或线性滤波方法实现, 如此矩阵处理方法容易实现, 特别是速度很快. 然而, 较为复杂的问题处理效果就不理想了. 从 20 世纪 90 年代初, 随着数字图像应用的逐渐推广, 数学家们开始考虑把一个图像矩阵看作观测图像函数的离散, 利用丰富的数学技巧来研究更多的新数学工具, 来解决各种图像函数处理问题, 使得解有高精度, 如传统方法中没有的理想几何性质 — 先函数处理, 后函数离散. 例如, 文献 [1, 2] 提出了用变分模型进行图像恢复和重建; 文献 [3] 给出的一个变分模型, 可以用分块光滑函数逼近 L2 函数, 找出块函数间的间断集合, 被广泛用于图像自动分割, 详见专著 [4, 5]. 如今, 图像科学已发展为一门跨学科的前沿数学学科. 本文介绍单幅 X 射线图像密度重建中的一些数学结果.

为了引入我们要考虑的问题和模型, 首先概述一下有关的图像恢复和重建的简单模型. 值得一提的是, 因为观测图像和真解不类似, 密度重建问题比图像去噪去模糊问题显得更复杂、更有挑战性.

### 1.1 图像去噪去模糊模型

设  $z = z(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  为含有未知 Gauss 相加白噪声  $\eta$  的观测图像函数, 令  $K$  为有卷积定义的线性模糊函数算子<sup>[4]</sup>. 图像去噪去模糊模型有下面的关系式表示:

英文引用格式: Chen K, Wei S H. On some variational models and their algorithms for axially symmetric objects tomography from a single X-ray source (in Chinese). *Sci Sin Math*, 2015, 45: 1537–1548, doi: 10.1360/N012015-00072

$$z = Ku + \eta, \tag{1.1}$$

其中  $\eta \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . 方程 (1.1) 作为一个典型的反问题, 若没有正则化, 则是没有唯一解的. 加上任一正则化, 解能得到唯一, 数学解没有问题, 但不一定有应用价值, 解好坏有数学方法判断, 对图像问题, 也可用视觉判断. 选择适当或最佳正则化, 是个数学难题. 文献 [1] 通常被公认为是最有开创性的工作, 提出用全变分 (TV), 即梯度的 1 范数, 正则化

$$\min_{u \in \text{BV}(\Omega)} \|K * u - z\|_2^2 + \alpha \iint_{\Omega} |\nabla u| d\Omega, \tag{1.2}$$

其中  $\alpha$  是个正的偶和参数, 有界变分空间 BV, 允许解间断, 定义如下:

$$\text{BV}(\Omega) = \left\{ u \mid \sup_{\phi \in C_c^1} \iint_{\Omega} u \operatorname{div} \phi \, d\Omega < \infty, \|\phi\| \leq 1 \right\},$$

$C_c^1$  中  $c$  表示紧支集. 连续优化问题 (1.2) 既可以在离散后通过非线性优化方法解, 也可以解它的 Euler 偏微分方程  $K^*Ku - \alpha \nabla \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = K^*z$ , 其中边界条件为第二类,  $K^*$  表示  $K$  的对偶算子. 为了不用假设  $|\nabla u| = 0$ , 常解的 Euler 方程加了个  $\beta > 0$  的小参数:

$$K^*Ku - \alpha \nabla \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \beta}} = K^*z. \tag{1.3}$$

由于  $\Omega$  是个方块区域, 在均匀网格上, 离散这个加性微分和积分方程不是难事, 但代数方程的数值解较为复杂.

上面 (1.2) 中的模型和它的类似形式引起众多学者的重视和研究, 如文献 [6–9]. TV 正则项也可用梯度半指数或分数解指数半范数代替, 以求压缩感知解<sup>[10]</sup>. 解 (1.2) 的快速算法也有众多研究, 如文献 [11–15], 还有选取  $\alpha$  也有一些工作, 包括文献 [16, 17]. TV 解由分块常数组成, 对光滑函数, 显出明显的不理想的阶梯效果. 为了克服解的光滑性, 也有许多利用高阶导数等作正则项替代 TV 的工作, 如文献 [9, 18–24]. 文献 [25] 提出了一种用 TV 来修正 H1 的方法, 以提高密度逼近精度. 本文试用了点高阶正则项, 但不是主要工作.

### 1.2 单幅 X 射线图像重建模型

为了测量一个金属复合材料物体内部密度  $\rho$  的分布, 利用高能 X 光照相进行密度重建是个广泛应用的技术 (参见文献 [25–30]). 如图 1 所示, 高能 X 光通过很强的穿透能力, 将三维物体投影到二维

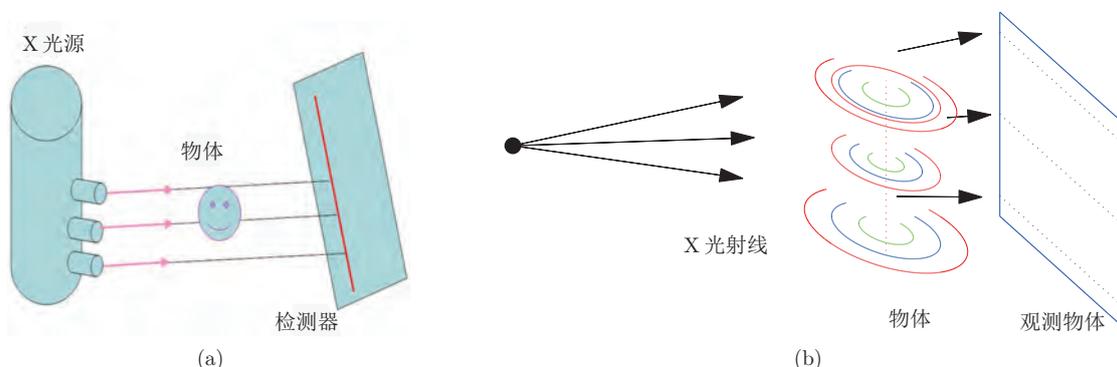


图 1 X 光单幅图像两个示意图: 每个左边是 X 射线光源, 中间是被测量物体, 右边是信号接收 (生成图像)

平面上, 根据右边接收信号的强弱, 可以重建密度  $\rho$ . 从数学角度, 一个三维物体的密度不需要有任何假设, 参见文献 [31]. 但鉴于最常用的应用, 通常假设被重建物体的密度满足下列假设之一:

- (I) 沿球半径  $r$  对称;
- (II) 沿  $z$  轴对称.

例如, 文献 [26] 用了假设 (I), 而文献 [27] 用了假设 (II), 但只用了 (I) 建模和仿真.

由于接收信号强弱的对数正比于物体的密度  $\rho$  沿射线路径的积分, 我们可以通过测量数据间接求得物质密度沿每一条射线的积分量  $b$  简化设立重建模型

$$b = \mathcal{A}\rho + \eta, \tag{1.4}$$

其中  $\eta$  仍是未知噪音. 这样密度恢复问题 (1.4) 就类似数字图像恢复问题 (1.1). 为了定义由线积分产生的几何模糊算子  $\mathcal{A}$ , 记横切  $z$  平面上的一维密度函数为  $\rho(r, z)$ ,  $r$  为轴 (或球) 坐标半径, 则有

$$\int_{\ell_i} \rho(r, z) dl = b(y, z), \tag{1.5}$$

其中  $y$  是离  $x$  轴平面的距离 (即图 2 中的  $ih$ ),  $\ell_i$  表示射线  $i$ . 这里需要假设有密度的物体限于半径为  $R$  的球内. 为方便描述, 先考虑如何求  $\mathcal{A}$  在  $z = 0$  面内的逼近  $A$ :

$$\begin{aligned} b_i = (\mathbf{b})_i &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r, 0) dl_i = 2 \int_0^R \rho dl_i = 2 \int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} \rho(r) dr \\ &\approx 2 \sum_{j=1}^n \rho_j \int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{r}{\sqrt{r^2 - a_i^2}} dr = 2 \sum_{j=1}^n \rho_j (\sqrt{r_j^2 - a_i^2} - \sqrt{r_{j-1}^2 - a_i^2}) \\ &\equiv (A\rho)_i. \end{aligned}$$

若成像平面离物体的距离  $L_2$  比  $L_1$  小 (见图 2), 通常假设 X 光射线是平行光扇形束 (见图 3), 如文献 [26, 27, 31], 这样算子  $\mathcal{A}$  立方体内的逼近矩阵将是块阵

$$\mathbf{A} = \text{diag}(A, \dots, A).$$

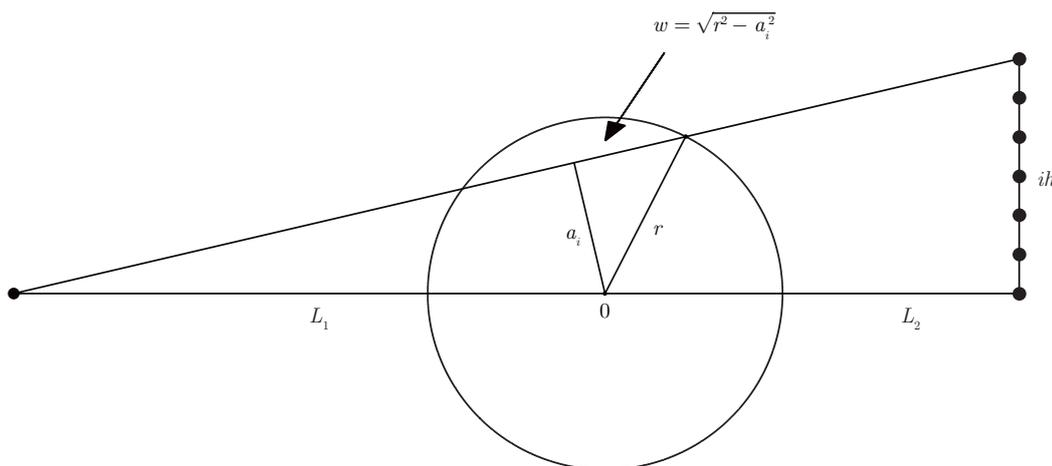


图 2 扇形束内光源 (左边) 和观测图像点 (右边) 的对应射线: 计算和密度域的交叉点

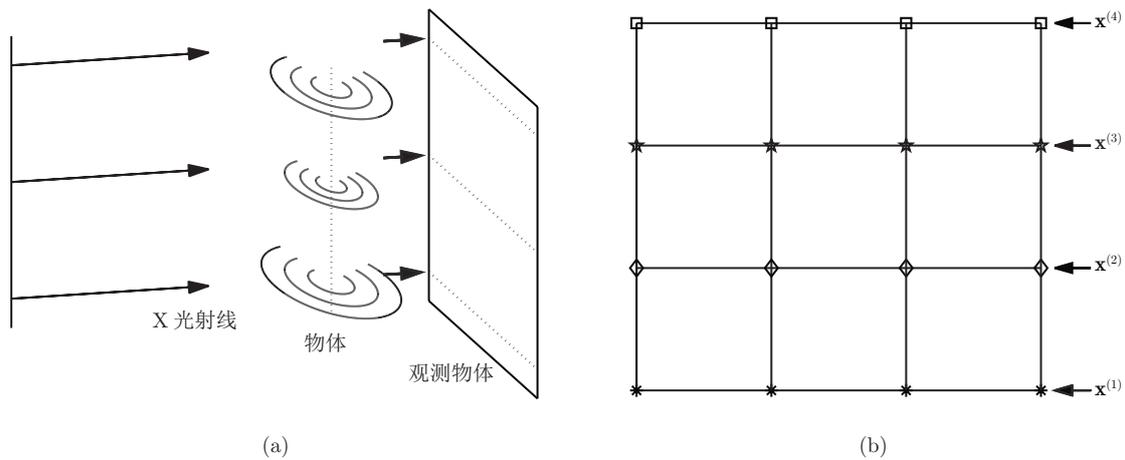


图 3 (a) 平行光作为锥形光束的近似; (b) 观测图像对应点

令一个扇形束的  $\theta_i$  角光源直线达到图像光点  $ih$  ( $h$  为接受区间距), 通过初等几何得到

$$\sin \theta_i = \frac{(ih)}{\sqrt{(ih)^2 + (L_1 + L_2)^2}} \equiv \frac{a_i}{L_1} \Rightarrow a_i = \frac{(ih)L_1}{\sqrt{(ih)^2 + (L_1 + L_2)^2}}, \quad i = 1, \dots, m.$$

令第  $k$  个扇形束产生图像的第  $k$  层观测值 (拟灰度值). 线性关系  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  可由平行光扇形束关系式生成

$$\mathbf{Ax}^{(k)} = \mathbf{b}^{(k)}, \quad \text{层数 } k = 1, 2, \dots, n, \quad (1.6)$$

其中

$$\mathbf{b}^{(k)} = [b_{k1}, \dots, b_{km}]^T \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{x}^{(k)} = [\rho_{k1}, \dots, \rho_{kp}]^T \in \mathbb{R}^p, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times p},$$

即

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{mn \times np}, \quad \mathbf{x} = [(\mathbf{x}^{(1)})^T, \dots, (\mathbf{x}^{(n)})^T]^T \in \mathbb{R}^{np}, \quad \mathbf{b} = [(\mathbf{b}^{(1)})^T, \dots, (\mathbf{b}^{(n)})^T]^T \in \mathbb{R}^{mn}.$$

因为  $\mathbf{b}$  中有噪音, 所以, 直接解 (1.6) 是不可以的.

进而, 加上正则化后, 文献 [26, 27] 分别提出和研究了有效的密度恢复模型

$$\begin{aligned} & \min_{\rho \in \mathbb{R}^p} \left\{ \frac{1}{2} \|A\rho - \mathbf{b}^{(1)}\|_2^2 + \alpha \sum_{j=1}^{p-1} |\rho_{1,j+1} - \rho_{1,j}| \right\}, \\ & \min_{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \|KA\rho - \mathbf{b}^{(1)}\|_2^2 + \mu_1 \sum_{j=1}^{p-1} |\rho_{1,j+1} - \rho_{1,j}| + \mu_2 \sum_{j=1}^{p-2} |\rho_{1,j+2} + \rho_{1,j} - 2\rho_{1,j+1}| \right\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

其中第二模型可以写成

$$\min_{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \|KA\rho - \mathbf{b}^{(1)}\|_2^2 + \mu_1 \|\nabla \rho\|_1 + \mu_2 \|\Delta \rho\|_1 \right\},$$

因为  $\rho \in \mathbb{R}^p$ , 所以, 第二模型仍是一维问题.

## 2 二维平行 X 光成像问题的模型与算法

对于球对称物体, 由于密度分布的确是一维问题, 即使有了二维观测图像  $\mathbf{b}$ , 也大没必要研究二维模型. 但对于轴对称物体或非对称问题, 用一维模型分片来重构二维密度分布, 精确度是不够的, 例

如,  $z$  方向不可能恰好连续或间断. 当然是否假设平行 X 光, 只是为了简化拟和项. 下面简要讨论一下这种模型.

如图 3(b) 所示, 令二维观测函数  $b$  和它对应的二维观测图  $\mathbf{b}$  给定, 则一维模型 (1.7) 的第二个模型可推广成如下两个密度恢复模型 (其中后者带模糊而前者没带模糊):

$$\begin{aligned} & \min_{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\rho - b\|_2^2 + \alpha \iint_{\Omega} |\nabla\rho| d\Omega \right\}, \\ & \min_{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \|K\mathcal{A}\rho - b\|_2^2 + \mu_1 \iint_{\Omega} |\nabla\rho| d\Omega + \mu_2 \iint_{\Omega} |\Delta\rho| d\Omega \right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

通过研究图像去噪问题<sup>[21]</sup>, 我们发现平均曲率是个很好的正则化算子 (参见文献 [19, 24, 32]). 所以, 我们先不直接用 (2.1), 而是构造一个基于平均曲率  $\kappa(\rho) = \nabla \cdot \nabla\rho / |\nabla\rho|$  的如下模型:

$$\min_{\rho} \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\rho - b\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \iint_{\Omega} \kappa(\rho)^2 d\Omega. \quad (2.2)$$

因为 (2.2) 的 Euler 方程有极强的非线性性, 目前还没有直接解它的既有效又收敛的迭代数值方法. 参见文献 [15, 33] 中如何解去噪问题, 我们可以利用增广 Lagrange 法 (ALM) 来简化非线性优化模型 (2.2).

用 ALM 法, 模型 (2.2) 可简化为 (虽然貌似没简化)

$$\min_{\rho, \theta} \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\rho - b\|_2^2 + \langle \lambda, \rho - \theta \rangle + \frac{\beta}{2} \|\rho - \theta\|_2^2 + \frac{\alpha}{2} \iint_{\Omega} \kappa(\theta)^2 d\Omega, \quad (2.3)$$

其中  $\lambda$  为 Lagrange 乘子. 但新的 Euler 方程可解 (因为第一个方程线性, 第二个方程拟去噪),

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}^*(\mathcal{A}\rho - b) + \lambda + \beta(\rho - \theta) = 0, \\ & \beta(\theta - \rho) + \alpha \nabla \cdot \left( \frac{\nabla\kappa}{|\nabla\theta|_{\beta}} - \frac{\nabla\theta \cdot \nabla\kappa}{(|\nabla\theta|_{\beta})^3} \nabla\theta \right) - \lambda = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

例如, 离散后, 上面第一方程对第  $k$  层平行光扇形束变为 ( $\mathbf{x}^{(k)}$  系数正定)

$$A^*(A\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{b}^{(k)}) + \lambda^{(k)} + \beta(\mathbf{x}^{(k)} - \theta^{(k)}) = 0. \quad (2.5)$$

**算法 I** (密度重构的高阶去噪模型)

对  $k = 0, 1, 2, \dots$

- (1) 固定  $\theta = \theta^{(k)}$ , 用共扼梯度法从方程 (2.5) 中解  $\mathbf{x}^{(k+1)}$ ;
- (2) 固定  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(k+1)}$  (即  $\rho$ ), 用多重网格法从方程 (2.4) 中解  $\theta^{(k+1)}$ ;
- (3) 更新  $\lambda^{(k+1)} := \lambda^{(k)} + \beta(\mathbf{x}^{(k+1)} - \theta^{(k+1)})$ .

### 3 二维锥行 X 光成像问题的模型与算法

锥行 X 光 (图 1(b)) 比平行 X 光 (图 3(a)) 更接近单光源 X 光技术的实际; 当然与医疗用的 X 光技术既类似又不同. 观测到的图像  $\mathbf{b}$  仍如图 3(a) 所示.

现在提出我们的二维解模型如下: 与 (2.1) 中的第二个模型 (或第一个模型加模糊项) 类似但不同, 即

$$\min_{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \|K\mathcal{A}\rho - b\|_2^2 + \alpha \iint_{\Omega} |\nabla\rho| d\Omega + \beta \iint_{\Omega} |\nabla\mathcal{A}\rho| d\Omega \right\}. \quad (3.1)$$

我们注意到这类变分问题中一般对中间量  $\mathcal{A}\rho$  没加正则项, 加上会更合理, 但像 (3.1) 中基于相乘算子  $\nabla\mathcal{A}\rho$  的正则项是需特殊处理的, 不易直接解. 因为当离散问题 (3.1) 中的相乘算子  $K\mathcal{A}$  后,  $K$  会变为带结构的满矩阵, 而  $\mathcal{A}$  将是稀疏块矩阵, 所以不把模糊项  $K$  和几何模糊项  $\mathcal{A}$  分开, 相乘后矩阵的计算结构将会失去, 如果  $\mathbf{b}$  图像很大 (高分辨率) 时, 实现起来困难太大, 数学计算也不合理. 为了处理两个相乘算子, 我们利用 ALM 法把 (3.1) 转化为

$$\min_{\rho, \theta, \omega, v} \left\{ \mathcal{L}(\rho, \theta, \omega, v; \lambda, \mu, g_3) = \frac{1}{2} \|K\theta - b\|_2^2 + \alpha_1 \|\omega\|_1 + \frac{\alpha_2}{2} \|\mathcal{A}\rho - \theta\|_2^2 + \frac{\beta_1}{2} \|\nabla\rho - \omega\|_2^2 + \frac{\beta_2}{2} \|\nabla\theta - v\|_2^2 + \alpha_3 \|v\|_1 + \langle \lambda, \nabla\rho - \omega \rangle + \langle \mu, \nabla\theta - v \rangle + \langle g_3, \mathcal{A}\rho - \theta \rangle \right\}, \quad (3.2)$$

其中  $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ ,  $v = (v_1, v_2)$  为分离变量,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$  为正参数,  $\lambda = (g_1, g_2)$ ,  $g_3, \mu = (g_4, g_5)$  为 Lagrange 乘子. 本文主要考虑 (3.1) 和 (3.2), 但我们给出的算法也可用于解 (2.1) 中的第二个模型, 还有下面模型:

$$\min_{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \|K\mathcal{A}\rho - b\|_2^2 + \alpha \iint_{\Omega} |\nabla\rho| d\Omega + \beta \iint_{\Omega} \kappa(\rho)^2 d\Omega \right\}. \quad (3.3)$$

变分模型 (3.2) 的主变量  $\theta$  和  $\rho$  的 Euler 方程可以导出为

$$\begin{cases} K^*K\theta + \alpha_2\theta - \beta_2\Delta\theta = K^*b + \alpha_2\mathcal{A}\rho + g_3 - \beta_2\operatorname{div}(v) - \operatorname{div}(\mu), \\ \alpha_2\mathcal{A}^*\mathcal{A}\rho - \beta_1\Delta\rho = \alpha_2\mathcal{A}^*\theta + \operatorname{div}(\lambda) - \mathcal{A}^*g_3 - \beta_1\operatorname{div}(\omega). \end{cases} \quad (3.4)$$

这里, (3.2) 中对  $\omega$  优化的子问题

$$\min_{\omega} \left\{ \alpha_1 \|\omega\|_1 + \frac{\beta_1}{2} \|\nabla\rho - \omega\|_2^2 + \langle \lambda, \nabla\rho - \omega \rangle \right\}$$

可写成如下等价形式:

$$\min_{\omega} \left\{ \alpha_1 \iint_{\Omega} |\omega| d\Omega + \frac{\beta_1}{2} \iint_{\Omega} \left| \omega - \left( \nabla\rho + \frac{\lambda}{\beta_1} \right) \right|^2 d\Omega + T(\rho, \lambda) \right\},$$

然后就有分析解 (注意,  $T$  函数与  $\omega$  无关)

$$\omega = \omega_0 \max \left( 0, 1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{1}{|\omega_0|} \right), \quad \omega_0 = \nabla\rho + \frac{\lambda}{\beta_1}. \quad (3.5)$$

这是因为优化问题  $\min_{\vec{x}} \iint_{\Omega} [\eta|\vec{x}| + \frac{r}{2}|\vec{x} - \vec{x}_0|^2] d\Omega$  的分析解<sup>[33]</sup> 是

$$\vec{x} = \max \left( 0, 1 - \frac{\eta}{r|\vec{x}_0|} \right) \vec{x}_0.$$

同理,  $v$  优化子问题

$$\min_v \left\{ \alpha_3 \|v\|_1 + \frac{\beta_2}{2} \|v - \nabla\theta\|_2^2 + \langle \mu, \nabla\theta - v \rangle \right\}$$

的分析解是

$$v = v_0 \max \left( 0, 1 - \frac{\alpha_3}{\beta_2} \frac{1}{|v_0|} \right), \quad v_0 = \nabla\theta + \frac{\mu}{\beta_2}. \quad (3.6)$$

下面介绍如何数值求解 (3.4) 中的主变量  $\theta$  和  $\rho$ . 首先用交替变量法, 用 (3.4) 的第一个方程解  $\theta$ , 用第二个方程解  $\rho$ . 因为  $\mathcal{A}$  和  $K$  离散后都是带结构的块阵, 两个方程皆可用共扼梯度法求解, 进而给出整体算法 (方法 3, 简记为 M3) 如下:

**算法 II** (密度重构模型 (3.2))

对  $k = 0, 1, 2, \dots$

- (1) 固定  $\rho = \rho^{(k)}, \mu = \mu^{(k)}, v = v^{(k)}, g_3 = g_3^{(k)}$ , 用共扼梯度法从 (3.4) 中第一个方程解  $\theta^{(k+1)}$ ;
- (2) 固定  $\theta = \theta^{(k+1)}, \lambda = \lambda^{(k)}, \omega = \omega^{(k)}, g_3 = g_3^{(k)}$ , 用共扼梯度法从 (3.4) 中第二个方程解  $\rho^{(k+1)}$ ;
- (3) 通过 (3.5) 和 (3.6), 更新  $\omega = \omega^{(k+1)}, v = v^{(k+1)}$ ;
- (4) 更新  $\lambda = \lambda^{(k+1)} := \lambda^{(k)} + \alpha_2(\nabla\rho^{(k+1)} - \omega^{(k+1)})$ ;
- (5) 更新  $\mu = \mu^{(k+1)} := \mu^{(k)} + \beta_2(\nabla\theta^{(k+1)} - v^{(k+1)})$ ;
- (6) 更新  $g_3 = g_3^{(k+1)} := g_3^{(k)} + \beta_1(\mathcal{A}\rho^{(k+1)} - \theta^{(k+1)})$ .

下面考虑 M3 的两个相关的模型. 首先, 若上面模型 (3.1) 中取  $\beta = 0$ , 即

$$\min_{\rho} \left\{ \frac{1}{2} \|K\mathcal{A}\rho - b\|_2^2 + \alpha \iint_{\Omega} |\nabla\rho| d\Omega \right\}. \quad (3.7)$$

下面称为 M1 (方法 1). 也可考虑直接解它的 Euler 方程

$$(K\mathcal{A})^*K\mathcal{A}\rho - \alpha\nabla \cdot \frac{\nabla\rho}{|\nabla\rho|} = (K\mathcal{A})^*b, \quad (3.8)$$

利用不动点法,

$$(K\mathcal{A})^*K\mathcal{A}\rho^{(k+1)} - \alpha\nabla \cdot \frac{\nabla\rho^{(k+1)}}{\sqrt{|\nabla\rho^{(k)}|^2 + \gamma}} = (K\mathcal{A})^*b. \quad (3.9)$$

它的算法类似算法 II 的第 1 步. 其次, 我们称另一个 M3 相关模型为 M2 (方法 2). 它的提出是要避免 (3.8) 中的非线性, 我们也可以称作半 ALM 法 (因为只处理了正则项), 即

$$\min_{\rho, \omega} \left\{ \frac{1}{2} \|K\mathcal{A}\rho - b\|_2^2 + \alpha_1 \|\omega\|_1 + \frac{\beta_1}{2} \|\nabla\rho - \omega\|_2^2 + \langle \lambda, \nabla\rho - \omega \rangle \right\}. \quad (3.10)$$

(3.10) 的 Euler 方程为

$$(K\mathcal{A})^*K\mathcal{A}\rho - \beta_1\Delta\rho = (K\mathcal{A})^*b + \operatorname{div}(\lambda) - \beta_1\operatorname{div}(\omega), \quad (3.11)$$

类似 (3.5), (3.10) 对  $\omega$  优化的子问题的解为

$$\omega = \omega_0 \max \left( 0, 1 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} \frac{1}{|\omega_0|} \right), \quad \omega_0 = \nabla\rho + \frac{\lambda}{\beta_1}. \quad (3.12)$$

进而整体解算法类似算法 II 的第 1, 3, 4 步; 也与文献 [27] 中的 ALM 算法类似.

本文提到和提出的数值算法的收敛性, 只有部分结果, 有待进一步研究. 首先, 提到的两个高阶模型 (2.3) 和 (3.3), 尽管已知的数值结果说明它们比低阶 TV 类的模型效果好不少, 但没有收敛性证明, 实际上解的存在性证明也没有 (由于非凸, 已知 Euler 方程解不唯一). 因为模型 (3.1) 没有高阶项, 所以有凸性, 这样一来, 修正的 M1, M2, M3 的收敛性可以保证. 这里, 需要修正的原因是交替方向乘子法 (ADMM) 的收敛性对块变量的个数有要求<sup>[34]</sup>. 如下修正后的算法 II (M3) 是收敛的<sup>[27, 34]</sup>:

$$\begin{cases} (\rho^{(k+1)}, \theta^{(k+1)}, \omega^{(k+1)}, v^{(k+1)}) = \arg \min_{\rho, \theta, \omega, v} \mathcal{L}(\rho, \theta, \omega, v; \lambda^{(k)}, \mu^{(k)}, g_3^{(k)}), \\ \lambda^{(k+1)} := \lambda^{(k)} + \alpha_2(\nabla\rho^{(k+1)} - \omega^{(k+1)}), \\ \mu^{(k+1)} := \mu^{(k)} + \beta_2(\nabla\theta^{(k+1)} - v^{(k+1)}), \\ g_3^{(k+1)} := g_3^{(k)} + \beta_1(\mathcal{A}\rho^{(k+1)} - \theta^{(k+1)}). \end{cases}$$

## 4 数值模拟结果

这里给出两个仿真实验结果.

首先利用算法 I 解一个平行光球对称密度重构问题, 如图 4 所示. 通过比较可以看出, 高阶平均曲率 MC 正则化比全变分更有效. 这与文献 [27] 结果一致.

下面利用算法 II 解一个锥形光轴对称密度重构问题. 如图 5-7 所示, 我们考虑三种情形: (1) 无噪音无模糊; (2) 有噪音无模糊; (3) 有噪音有模糊. 计算结果表明, 在情形 (1) 和 (3) 下, 新模型 M3 是非常有效的. 但在情形 (2) 下, M2 更好些. M1 比较差, 证实我们的判断: ALM 法不仅是很好的线性化方法, 更提供了有用的中间量的正则化.

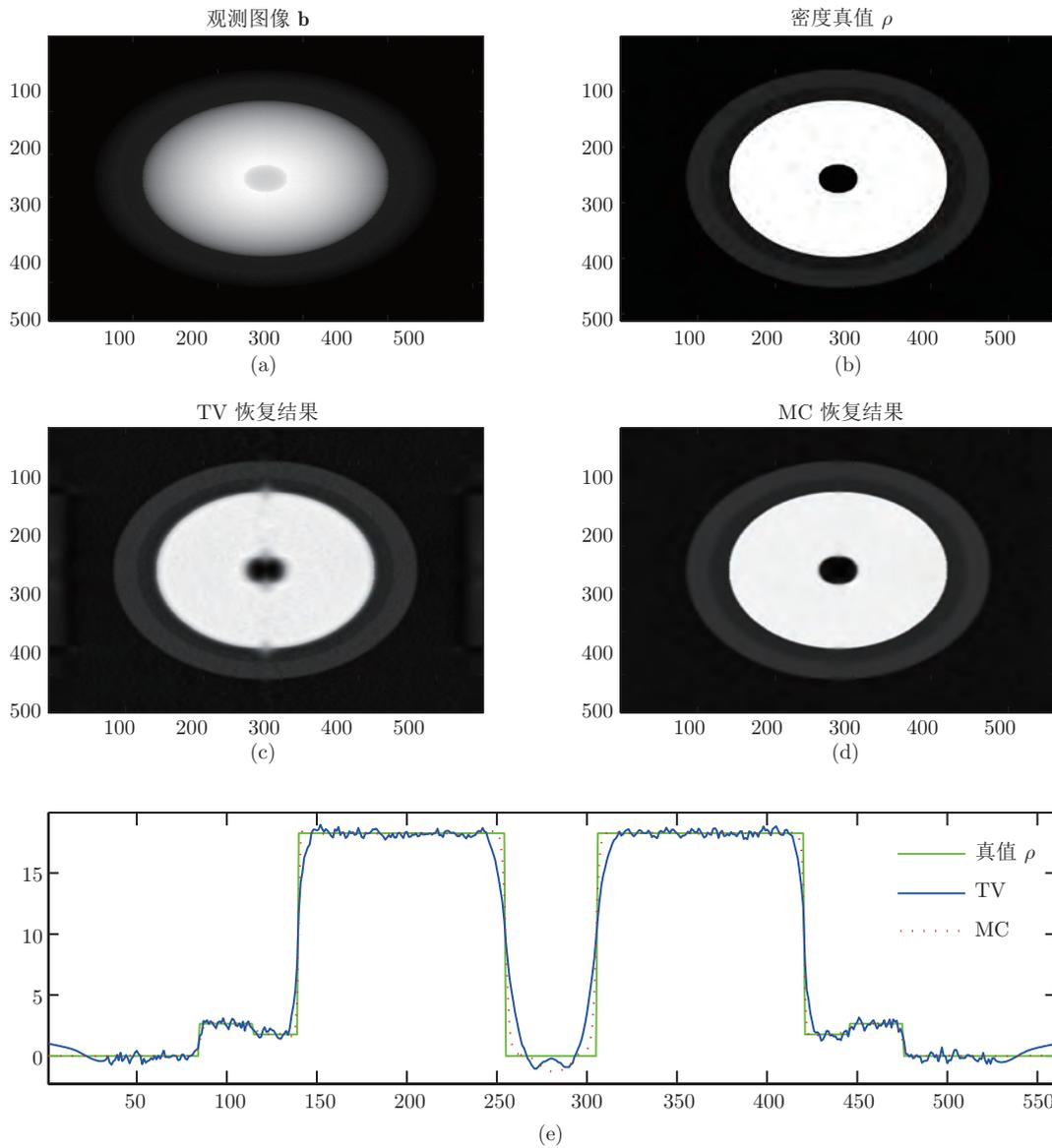


图 4 算法 I 的仿真. 可以看出平均曲率 MC 正则化更有效. (a) 观察图像; (b) 密度真解; (c) 全变分解 (若参数加大, 噪音变小, 但密度值会不精确); (d) MC 解; (e) 对比中线密度值

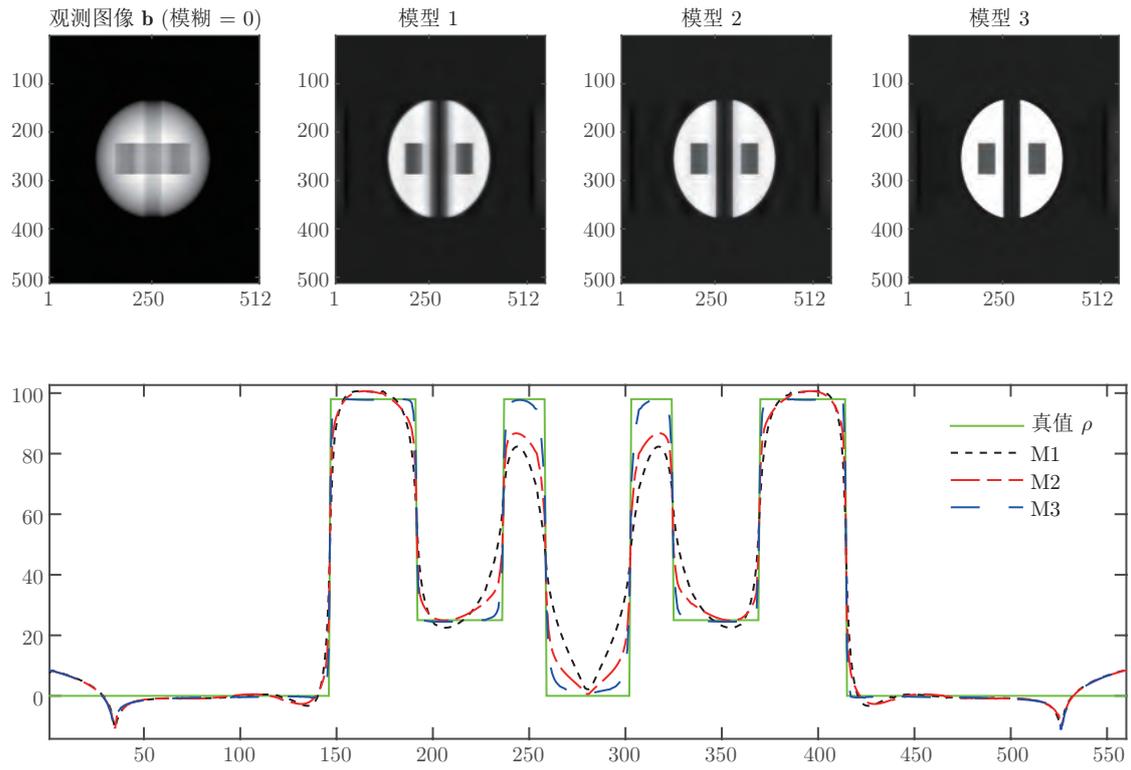


图 5 算法 II 的仿真 1 — 无噪声无模糊情形. 最下边对比中线密度值. M3 最好

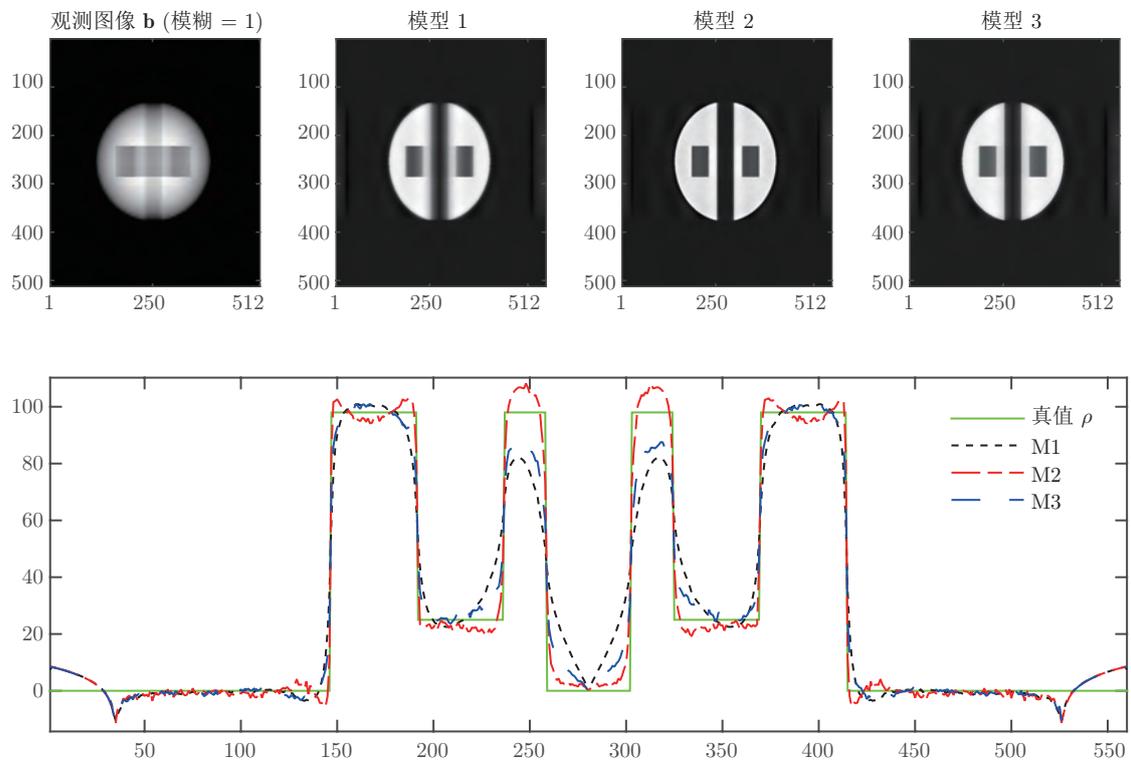


图 6 算法 II 的仿真 2 — 有噪声无模糊情形. 最下边对比中线密度值. M2 最好

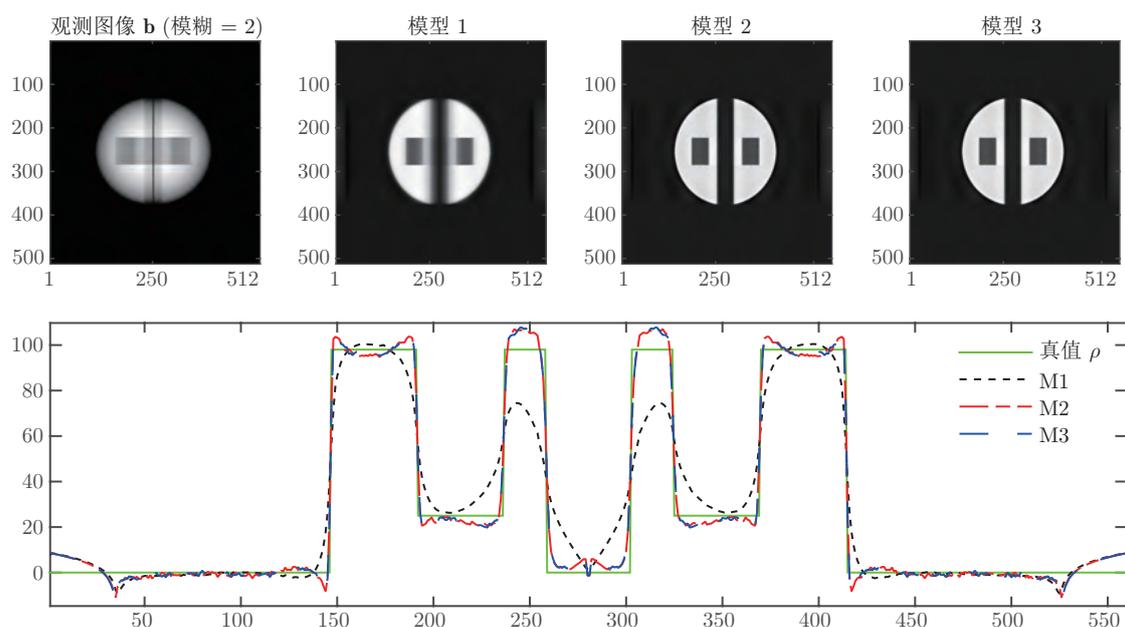


图 7 算法 II 的仿真 3 — 有噪音有模糊情形. 最下边对比中线密度值. M3 最好

## 5 结论

用 X 射线投影进行轴对称物体密度重建是个普遍的物理学问题, 但在大部分模型工作中, 为了方便, 都用平行光的近似. 本文不假设平行光, 尝试了一些新二维变分模型与其数值计算方法. 初步结果表明, 二维的工作量没有比一维工作增加太多, 也发现增广 Lagrange 解法能带来特殊和好的模拟效果. 未来工作将从几方面验证和分析锥形光模型优点.

## 参考文献

- 1 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Phys D*, 1992, 60: 259–268
- 2 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 1990, 12: 629–639
- 3 Mumford D, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Comm Pure Appl Math*, 1989, 42: 577–685
- 4 Chan T F, Shen J H. *Image Processing and Analysis: Variational, PDE, Wavelet, and Stochastic Methods*. Philadelphia: SIAM, 2005
- 5 Vese L M. *Variational Methods in Image Processing*. London: Chapman & Hall/CRC Press, 2015
- 6 Li M, Feng X C. Image restoration using total variation and anisotropic diffusion equation. *Front Electr Electron Eng China*, 2007, 2: 400–403
- 7 Hanke M, Nagy J, Plemmons R J. Preconditioned iterative regularization for ill-posed problems. In: *Numerical Linear Algebra*. Berlin: Walter de Gruyter Publishers, 1993, 141–164
- 8 Vogel C R, Chan T F, Plemmons R J. Fast algorithms for phase diversity-based blind deconvolution. In: *Adaptive Optical System Technologies, SPIE Proceedings Conference on Astronomical Imaging*. Bellingham: International Society for Optics and Photonics, 1998, 994–1005
- 9 Chen J J, Guo J. Image restoration based on adaptive  $P$ -Laplace diffusion. In: *Proceedings of the 3rd International Congress on Image and Signal Processing (CISP)*, vol. 1. Yantai: IEEE, 2010, 143–146
- 10 Xu Z B, Chang X Y, Xu F M.  $L-1/2$  regularization: A thresholding representation theory and a fast solver. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2012, 23: 1013–1027

- 11 Chang Q S, Chern I L. Acceleration methods for total variation-based image denoising. *SIAM J Sci Comput*, 2003, 25: 982–994
- 12 Chan T F, Chen K. An optimization-based multilevel algorithm for total variation image denoising. *SIAM J Multiscale Model Simul*, 2006, 5: 615–645
- 13 Chan R H, Chen K. A multilevel algorithm for simultaneously denoising and deblurring images. *SIAM J Sci Comput*, 2010, 32: 1043–1063
- 14 Abad J O, Morigi S, Reichel L, et al. Alternating Krylov subspace image restoration methods. *J Comput Appl Math*, 2012, 236: 2049–2062
- 15 Huang Y M, Ng M K, Wen Y W. A fast total variation minimization method for image restoration. *SIAM J Multiscale Model Simul*, 2008, 7: 774–795
- 16 Zhang J P, Chen K, Yu B. An iterative Lagrange multiplier method for constrained total variation-based image denoising. *SIAM J Numer Anal*, 2012, 50: 983–1003
- 17 Chen K, Piccolomini E L, Zama F. An automatic regularization parameter selection algorithm in the total variation model for image deblurring. *Numer Algorithms*, 2014, 67: 73–92
- 18 Lin F R, Yang S W. A weighted H1 seminorm regularization method for Fredholm integral equations of the first kind. *Int J Comput Math*, 2014, 91: 1012–1029
- 19 Brito C, Chen K. Multigrid algorithm for high order denoising. *SIAM J Imaging Sci*, 2010, 3: 363–389
- 20 Yang F L, Chen K, Yu B, et al. Image denoising using LLT model and iterated total variation refinement. *Int J Numer Anal Model*, 2014, 5: 255–268
- 21 Sun L, Chen K. A new iterative algorithm for mean curvature-based variational image denoising. *BIT Numer Math*, 2014, 54: 523–553
- 22 Zhang X Q, Burger M, Bresson X, et al. Bregmanized nonlocal regularization for deconvolution and sparse reconstruction. *SIAM J Imaging Sci*, 2010, 3: 253–276
- 23 Xue F, Fan W H, Liu Q S. Image denoising based on improved non-local algorithm. In: *Advanced Research on Computer Science and Information Engineering*. Berlin: Springer, 2011, 283–289
- 24 Lysaker M, Osher S, Tai X C. Noise removal using smoothed normals and surface fitting. *IEEE Trans Image Process*, 2004, 13: 1345–1357
- 25 Asaki A J, Campbell P R, Chartrand R, et al. Abel inversion using total variation regularization: Applications. *Inverse Probl Sci Eng*, 2006, 14: 873–885
- 26 魏素花, 王双虎, 许海波. 轴对称物体 X 射线层析成像的正则化方法. *中国图象图形学报*, 2008, 13: 2275–2280
- 27 Chan R H, Liang H X, Wei S H, et al. High-order total variation regularization approach for axially symmetric object tomography from a single radiograph. *Inverse Probl Imaging*, 2015, 9: 55–77
- 28 Shi T M, Su Z X, Chau F T. Multiscale edge detection of images from its Radon transform. In: *Scientific Computing: Proceedings of the Workshop, 10–12 March 1997, Hong Kong*. Singapore: Springer-Verlag, 1997, 280–286
- 29 Betcke M M, Lionheart W R B. Multi-sheet surface rebinning methods for reconstruction from asymmetrically truncated cone beam projections: II. Axial deconvolution. *Inverse Problems*, 2013, 29: 115004
- 30 Hanson K M, Cuningham G M, Jennings G R. Tomographic reconstruction based on flexible geometric models. In: *Proceedings of 1994 International Conference on Image Processing, vol. 2*. Austin: IEEE, 1994, 145–147
- 31 胡渊, 许海波. 利用单幅投影图像重建不对称客体密度分布. *强激光与粒子束*, 2011, 23: 2507–2511
- 32 Zhu W, Chan T F. Image denoising using mean curvature. *SIAM J Imaging Sci*, 2012, 5: 1–32
- 33 Zhu W, Tai W C, Chan T F. Augmented Lagrangian method for a mean curvature based image denoising model. *Inverse Probl Imaging*, 2013, 7: 1409–1432
- 34 He B S, Tao M, Yuan X M. A splitting method for separable convex programming. *IMA J Numer Anal*, 2015, 35: 394–426

## On some variational models and their algorithms for axially symmetric objects tomography from a single X-ray source

CHEN Ke & WEI SuHua

**Abstract** In this paper, we present some variational models and their computational algorithms to reconstruct

density distribution of an axially symmetric object by X-ray radiographs, generalising previous works on spherically symmetric objects. Since effective numerical solution of the nonlinear systems generated from these models remains a mathematical challenge, the proposed use of an augmented Lagrangian method enables incorporation of high order regularizers and an automatic adding of regularization in the case of additional blurring. Some preliminary tests are conducted. This work lays the foundation for future works to model 3D non-symmetric objects by X-ray radiographs.

**Keywords** X-ray tomography, image reconstruction, variational models, regularization, Abel inversion

**MSC(2010)** 34A55, 47A52, 47J25, 47J30, 94A08

**doi:** 10.1360/N012015-00072