

13ÈME COLLOQUE D'AÉRODYNAMIQUE APPLIQUÉE  
LYON - 8, 9 ET 10 NOVEMBRE 1976.

PRÉVISION DE L'APPARITION ET DU  
DÉVELOPPEMENT DE LA TRANSITION  
DE LA COUCHE LIMITE

PAR

R. MICHEL  
DÉPARTEMENT D'AÉROTHERMODYNAMIQUE  
O.N.E.R.A. / C.E.R.T. - TOULOUSE

# PRÉVISION DE L'APPARITION ET DU DÉVELOPPEMENT DE LA TRANSITION DE LA COUCHE LIMITE

par Roger MICHEL

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA)  
Centre d'Etudes et de Recherches de Toulouse (CERT), Département d'Aérothermodynamique - TOULOUSE

## RÉSUMÉ

On analyse les moyens actuellement disponibles pour prédire l'apparition de la transition et son développement jusqu'au turbulent établi, dans le domaine des écoulements incompressibles ou modérément compressibles.

On effectue d'abord une revue des techniques pratiques de prévision en discutant les critères empiriques proposés pour estimer la position de la transition ; on présente dans le même esprit les possibilités de calculer depuis un point de transition fixé le développement de la couche limite dans la région de la transition.

On analyse ensuite tout particulièrement des techniques nouvelles faisant appel à des équations de transport de la turbulence et cherchant à tenir compte d'une façon plus cohérente et plus rationnelle de l'influence a priori très complexe des facteurs pouvant intervenir dans les problèmes pratiques. On montre par différents exemples d'application, qu'elles peuvent effectivement conduire à un bon accord avec l'expérience, aussi bien pour la localisation de la transition que pour le développement de la couche limite jusqu'au régime turbulent.

## PREDICTION OF ONSET AND DEVELOPMENT OF BOUNDARY LAYER TRANSITION

### SUMMARY

The paper is devoted to an analysis of the existing means of prediction of the onset of the boundary layer transition and of its development up to the established turbulent regime, in the field of incompressible or moderately compressible flows.

A review of the practical techniques of prediction is given at first, with a discussion of the available empirical criteria and of approximate methods for calculating the boundary layer, starting from a given beginning of transition.

Special attention is paid after that to recent methods of prediction, using transport equations for describing the development of the turbulence in the boundary layer during transition. It is shown by different examples of application, that this is a technique which permits really to give a reasonable prediction of the onset and development of transition, in good agreement with experiments.

### NOTATIONS

$x, y, z$  : Coordonnées longitudinale, normale et transversale

$u, v, w$  : Composantes de la vitesse

$U_e$  : Vitesse extérieure

$p$  : Pression

$\rho$  : Masse volumique

$\mu$  : Viscosité dynamique

$\nu$  : Viscosité cinématique  $\mu/\rho$

$\delta$  : Epaisseur de couche limite

$\delta_1$  : Epaisseur de déplacement

$\Theta$  : Epaisseur de quantité de mouvement

$H$  : Paramètre de forme  $\delta_1/\delta$

$\lambda$  : Paramètre de Pohlhausen  $\frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$

$T_u$  : Intensité de turbulence  $\left( \frac{\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{3U_e^2} \right)^{1/2}$

$K$  : Energie cinétique  $\frac{\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{2}$

$\tau$  : Frottement dans la couche limite

$\tau_p$  : Frottement à la paroi

$\phi$  : Flux de chaleur

$\phi_p$  : Flux de chaleur à la paroi

$C_f$  : Coefficient de frottement  $2\tau_p/\rho U_e^2$

$\epsilon$  : Dissipation

$\omega$  : Rotationnel

$\gamma$  : Facteur d'intermittence

$R_L$  : Nombre de Reynolds  $U_e L/\nu$

$R_t$  : Nombre de Reynolds de turbulence

## 1 - INTRODUCTION

On peut d'abord souligner pour poser le problème, que le regain considérable d'intérêt qui se manifeste depuis quelque temps pour la transition de la couche limite, est sans doute lié dans une large mesure aux progrès accomplis dans les méthodes numériques et dans le calcul des écoulements, et par voie de conséquence, à une demande de plus en plus urgente de méthodes permettant de déterminer simultanément l'écoulement non visqueux et l'écoulement de couche limite.

Il est évident qu'il est nécessaire pour répondre à cette demande, de disposer de moyens de prédiction, non seulement de la position de la transition, du nombre de Reynolds auquel elle débute, mais aussi du développement de la couche limite dans la région qui va conduire du régime laminaire au régime turbulent. Il est clair également par les nombreuses questions pratiques intéressées, dans l'Aérodynamique des avions et des turbomachines, que le problème fait intervenir des facteurs variés, gradient de pression, turbulence de l'écoulement général, état de surface des parois, flux de chaleur qui les traverse, facteurs dont l'influence souvent combinée peut conduire à une grande complexité de phénomènes et de résultats.

On se propose ici, en considérant principalement le domaine des écoulements incompressibles ou modérément compressibles de l'Aéronautique actuelle, de faire d'une part le point sur les moyens pratiques dont on dispose actuellement pour répondre au moins à certaines des questions posées, et d'autre part des techniques modernes dans lesquelles on cherche à faire intervenir de façon plus approfondie le développement de la turbulence, pour aboutir à des méthodes de prévision tenant compte de façon rationnelle des effets des différents facteurs.

Dans la première optique on effectuera ainsi une revue des critères empiriques proposés jusqu'ici pour prédire les nombres de Reynolds de transition ; on examinera également par quels moyens pratiques il est actuellement possible de calculer le développement de la couche limite à partir d'un début de transition fixé, pour déterminer en fin de transition les conditions initiales d'un calcul de la couche limite turbulente établie.

On portera ensuite tout spécialement l'attention sur des techniques de calcul nouvelles, techniques faisant appel à différentes équations de transport destinées à décrire la naissance et le développement des principaux termes caractéristiques de la turbulence. Établies d'abord pour prédire les écoule-

ments turbulents établis, les modélisations de ces équations de transport ont pu être adaptées récemment pour prendre en compte les effets de la viscosité sur la turbulence. On pourra montrer, notamment par différents exemples d'application, qu'elles semblent représenter d'ores et déjà pour le calcul de la transition, un outil réellement théorique des plus prometteur.

## 2 - TECHNIQUES PRATIQUES DE PREVISION DE LA TRANSITION

2.1. Rappel succinct sur la théorie de l'instabilité laminaire.

Il est utile, notamment pour la présentation ultérieure de certains critères de transition, de faire d'abord un bref rappel sur les éléments essentiels de la théorie de l'instabilité laminaire, par laquelle on étudie essentiellement l'influence de la viscosité sur des perturbations produites éventuellement dans la couche limite.

► Hypothèses :

- écoulement parallèle:  $U=U(y)$
- équation des petites perturbations
- fonction de courant perturbatrice  $\psi$

$$\psi = \varphi(y) e^{\beta t} e^{2\pi i(\frac{x}{L} - ft)}$$

► Equation homogène pour  $\psi$  (ORR-SOMMERFELD)

paramètres:  $R_\delta, \beta, L, f$

► Solution non triviale  $\Rightarrow E(R_\delta, \beta, L, f) = 0$ 

Exemple: faisceau des courbes d'amplification pour la plaque plane (incompressible)

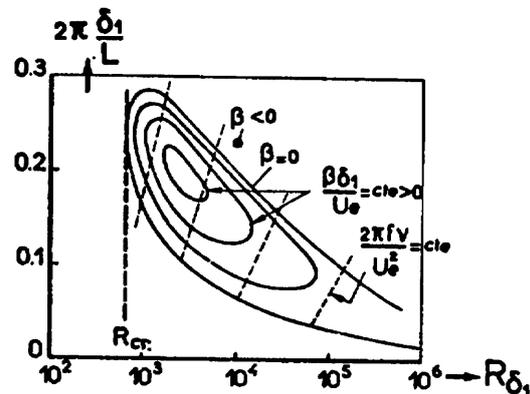


Fig. 1 : Principe et éléments essentiels de la théorie d'instabilité laminaire. (Théorie des ondes planes de Tollmien-Schlichting).

La figure 1 donne un rappel schématisé des hypothèses et du principe de la théorie des ondes planes de Tollmien-Schlichting. La fonction de courant perturbatrice dont dérivent les deux com-

posantes de la fluctuation de vitesse  $y$  est écrite sous forme d'une fonction périodique du temps, dans laquelle apparaissent :

- une fonction d'amplitude  $\varphi(y)$ ,
- un facteur d'amplification  $\beta$ ,
- une longueur d'onde  $L$ ,
- une fréquence  $f$ .

L'introduction de cette forme dans les équations de couche limite écrites pour un écoulement instationnaire, conduit à l'équation d'Orr-Sommerfeld pour la fonction d'amplitude  $\varphi$ . La recherche d'une solution non triviale ( $\varphi \neq 0$ ) définit les valeurs propres des paramètres qui apparaissent dans l'équation. On obtient ainsi une relation entre le facteur d'amplification, la longueur d'onde, la fréquence et le nombre de Reynolds formé par exemple avec l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

Le résultat peut être représenté sous la forme d'un réseau de courbes donnant la longueur d'onde en fonction du nombre de Reynolds pour différentes valeurs du facteur d'amplification ; pour faire intervenir le quatrième paramètre, on trace dans le même plan les lignes sur lesquelles la fréquence demeure constante.

L'examen d'un tel réseau, représenté figure 1 pour la couche limite de plaque plane conduit à une observation essentielle : il existe une courbe dite "courbe neutre" à l'intérieur de laquelle toutes les perturbations sont amplifiées ( $\beta > 0$ ) et à l'extérieur de laquelle elles sont amorties. Il existe un nombre de Reynolds dit "nombre de Reynolds critique d'instabilité" au-dessous duquel toutes les perturbations sont amorties.

La figure 2 donne à partir des calculs de Pretsch (Réf. 1), le nombre de Reynolds critique d'instabilité obtenu pour la famille des profils de vitesse des solutions semblables des couches limites laminaires ; le nombre de Reynolds de l'épaisseur de quantité de mouvement est porté en fonction du paramètre de Pohlhausen  $\lambda$  ; on utilise souvent une telle courbe pour déterminer le point d'instabilité laminaire sur les profils d'ailes.

On a comparé sur la même figure le nombre de Reynolds critique au nombre de Reynolds de transition qui peut être observé sur paroi lisse pour une faible turbulence extérieure. Il est bien évident que le nombre de Reynolds critique d'instabilité, qui ne représente que celui à partir duquel peut se produire la transition, est très considérablement inférieur au nombre de Reynolds auquel elle a effectivement lieu.

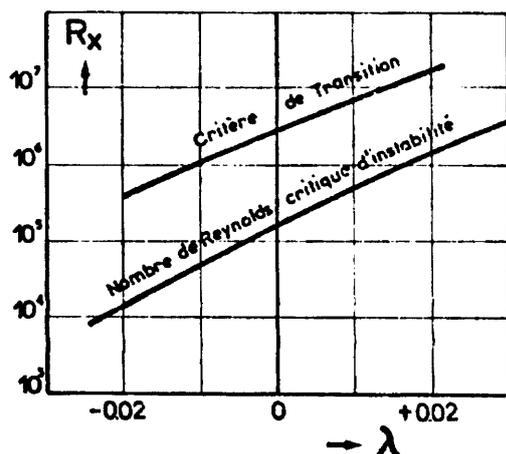
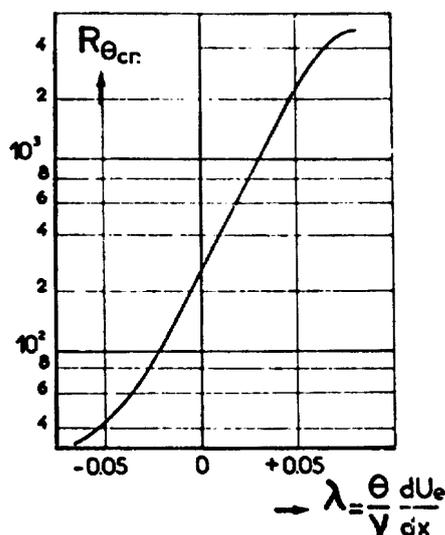


Fig. 2 : Nombre de Reynolds critique d'instabilité en fonction du paramètre de gradient de pression de Pohlhausen. Instabilité laminaire et transition.

La théorie de l'instabilité laminaire prévoit cependant de façon qualitative, l'influence du paramètre essentiel qu'est le gradient de la vitesse extérieure. Les écoulements accélérés donnent lieu à des profils de vitesse laminaires stables, pour lesquels les perturbations sont amorties jusqu'à des nombres de Reynolds importants, alors que le point d'inflexion caractéristique du profil de vitesse en écoulement ralenti est responsable d'une amplification beaucoup plus rapide des perturbations. La variation du nombre de Reynolds critique d'instabilité avec le paramètre de Pohlhausen est en fait assez comparable à celle du nombre de Reynolds de transition.

## 2.2. Critères relatifs au nombre de Reynolds de transition.

On a pu chercher également à comparer la position de la transition à celle du décollement laminaire, par exemple sur des profils d'ailes. Il faut

observer que l'abscisse relative  $x/C$  du point de décollement sur un profil est indépendante du nombre de Reynolds  $V_0 C/\nu$  formé avec la vitesse à l'infini et la corde du profil, alors que celle du point de transition en dépend très directement. Faisant décroître le nombre de Reynolds depuis des valeurs assez élevées pour que la transition ait lieu avant le décollement laminaire, on la verra reculer, atteindre et dépasser la position du décollement, se fixer par exemple au recollement, et même se situer plus en aval et disparaître éventuellement si le nombre de Reynolds est assez faible.

On a donc été amené à établir des critères empiriques, dans lesquels on a cherché à déterminer par l'exploitation de résultats expérimentaux, l'influence des principaux paramètres agissant sur le nombre de Reynolds de transition, celui-ci étant le plus souvent formé avec l'épaisseur de quantité de mouvement de la couche limite laminaire calculée jusqu'au point de transition.

#### Critères de transition avec turbulence extérieure faible :

Un certain nombre de critères ont d'abord été proposés pour tenir compte du facteur essentiel qu'est le gradient de pression longitudinal. Notons qu'ils supposent plus ou moins implicitement, que le nombre de Reynolds de transition tend vers une valeur limite aux faibles valeurs de l'intensité de turbulence de l'écoulement général, tendance que l'expérience semblait indiquer à l'époque. On admettait couramment par exemple que le nombre de Reynolds de transition sur plaque plane en soufflerie hypo-turbulente était de l'ordre de 3 millions ; des expériences plus récentes ont montré en fait que des effets acoustiques pouvaient intervenir sensiblement aux faibles niveaux de turbulence, et des nombres de Reynolds de transition nettement supérieurs ont pu être atteints dans des installations "silencieuses".

La figure 3 représente le critère que nous avons proposé en 1951, à la suite d'une analyse de résultats expérimentaux obtenus pour la transition de différents profils d'aile dans des souffleries à faible turbulence (Réf. 2).

Sous sa forme originale, il se présente comme une courbe critique reliant le nombre de Reynolds de l'épaisseur de quantité de mouvement laminaire calculée au point de transition, au nombre de Reynolds de l'abscisse ; il peut être utile d'en donner la formule de représentation proposée assez récemment par Cebeci et Smith (Réf. 3) :

$$R_\theta = 1,474 \left( 1 + \frac{22.400}{R_x} \right) R_x^{0,46}$$

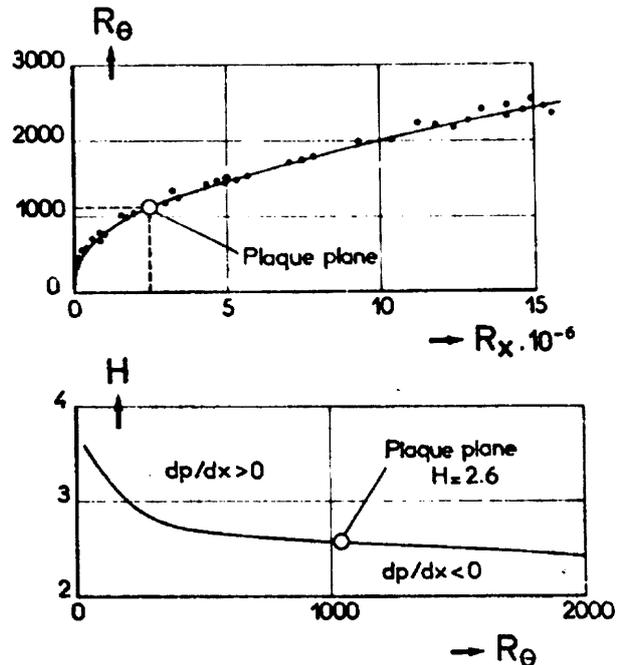


Fig. 3 : Critère de transition de Michel (Réf. 2).

L'application aux solutions semblables de la couche limite laminaire, permet aussi de relier le nombre de Reynolds de transition à l'angle du dièdre et à l'un, quelconque a priori, des paramètres associés. On obtient, par exemple, avec le paramètre de Pohlhausen la courbe de transition représentée figure 2. La courbe donnant le nombre de Reynolds de transition en fonction du paramètre de forme de la couche limite laminaire est représentée figure 3 ; le critère exprime simplement le fait que le nombre de Reynolds de transition est d'autant plus élevé que le paramètre de forme est plus faible, donc que la couche limite est plus stable.

Il a été suggéré par Smith et Gamberoni (Réf. 4) que le critère précédent pouvait être rapproché de la théorie de l'instabilité laminaire, ces auteurs trouvant qu'il correspond sensiblement à une amplification totale  $\int \beta dt = 9$ , depuis le point neutre, de la fréquence la plus critique dans la théorie d'instabilité. Une valeur légèrement inférieure (7 ou 8) a été également proposée par Van Ingen (Réf. 5).

Granville (Réf. 6) cherche également à relier la transition à l'instabilité laminaire en considérant la différence entre les nombres de Reynolds de l'épaisseur de quantité de mouvement au point de transition et au point d'instabilité ; il porte cette différence en fonction d'une valeur moyenne du paramètre de gradient de pression :

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_{x_i}^{x_t} \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} dx}{x_t - x_i}$$

pour obtenir par une corrélation des résultats expé-

rimentaux la courbe critique de la figure 4.

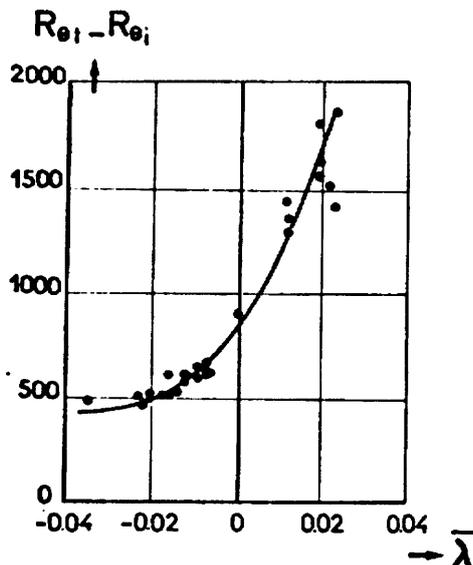


Fig. 4 : Critère de transition de Granville (Réf. 6).

Un certain nombre d'autres critères exprimant le nombre de Reynolds de transition en fonction du paramètre de gradient de pression ou en fonction d'un paramètre de forme de la couche limite laminaire ont également été proposés. On pourra citer notamment :

- Crabtree (Réf. 7) :  $R_{\theta} = f(\lambda)$
- Eppler (Réf. 8) :  $R_{\theta} = f(H^*)$
- Thiede (Réf. 9) :  $R_{\theta t} - R_{\theta i} = f(\bar{H}^*)$

où  $H^*$  est chez les deux derniers auteurs le rapport de l'épaisseur d'énergie cinétique à l'épaisseur de quantité de mouvement.

Déduits essentiellement des mêmes résultats expérimentaux, tous ces critères empiriques devraient en toute logique conduire à des résultats comparables. Leur comparaison, effectuée notamment par Hall et Gibbings (Réf. 10) montre qu'ils sont sensiblement en accord pour la plaque plane ( $R_{x t}$  de l'ordre de 3 Millions) et pour les gradients de pression négatifs.

Un gradient positif donnant lieu à des transitions nettes et rapides pour lesquelles il représente a priori le facteur principal, on devrait s'attendre à y trouver le meilleur accord. C'est en fait là que sont observées les divergences les plus importantes dans les différentes courbes critiques proposées ; elles sont le plus probablement liées à l'existence ou à l'approche fréquentes d'un décollement laminaire et à son interférence avec le phénomène de transition.

#### Influence de la turbulence extérieure

Des résultats nombreux et déjà anciens sont disponibles sur les effets de la turbulence extérieure sur le nombre de Reynolds de transition en

fluide incompressible. Le paramètre jugé jusqu'à maintenant comme essentiel est l'intensité de turbulence.

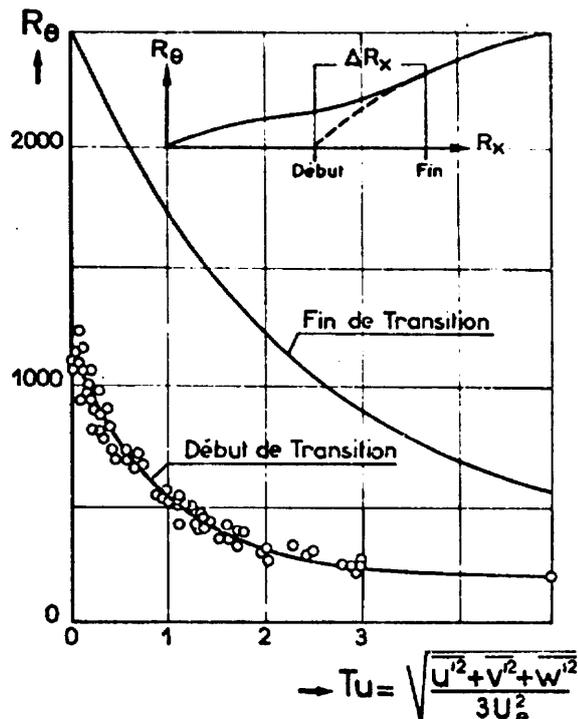


Fig. 5 : Transition sur plaque plane en écoulement incompressible : influence de la turbulence de l'écoulement extérieur (Réf. 10).

La figure 5 représente, à partir d'un regroupement récent des résultats expérimentaux (Réf. 10), les nombres de Reynolds en début et en fin de transition sur plaque plane, en fonction de l'intensité de la turbulence extérieure. Les nombres de Reynolds de l'abscisse se déduiront facilement de ceux qui sont donnés sur la figure pour l'épaisseur de quantité de mouvement, ou des formules de représentation proposées par Hall et Gibbings :

Début de transition :

$$R_x = \frac{(R_{\theta})^2}{0,664} \text{ avec } R_{\theta} = 190 + \exp(6,88 - 103 Tu)$$

Fin de transition :

$$\Delta R_x = \left(\frac{R_{\theta}}{0,036}\right)^{1,25} ; R_{\theta} = 320 + \exp(7,70 - 44,75 Tu)$$

On notera l'effet considérable de la turbulence extérieure et la diminution très rapide du nombre de Reynolds de transition quand  $Tu$  augmente. On observera également que la région dans laquelle s'effectue la transition est d'une étendue importante, d'un ordre de grandeur comparable au parcours effectué antérieurement par la couche limite laminaire.

Les résultats expérimentaux relatifs aux ef-

fets combinés de la turbulence extérieure et du gradient de pression sont beaucoup plus rares et les critères de transition sont en conséquence plus incertains. On donne *figure 6* le critère proposé par Dunham (Réf. 11) dans le cadre d'une analyse des moyens de prédiction des couches limites dans les écoulements à turbulence élevée des turbomachines. Le nombre de Reynolds  $R_{\theta}$  y est encore représenté en fonction du paramètre de gradient de pression, avec l'intensité de turbulence comme second facteur. L'influence de la turbulence extérieure est toujours considérable mais on observera qu'elle s'amortit nettement pour les nombres de Reynolds plus faibles des gradients de pression positifs ; on notera aussi que si le gradient de pression est un paramètre primordial à faible turbulence, son influence sur  $R_{\theta}$  s'atténue pour devenir pratiquement insensible aux niveaux élevés de turbulence qui peuvent correspondre aux écoulements de turbomachines.

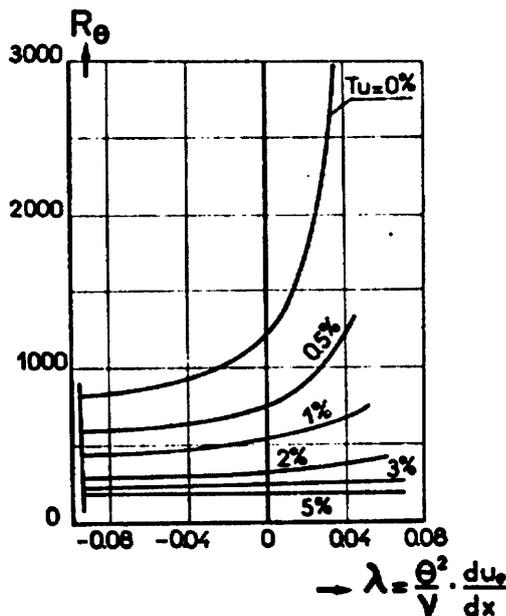


Fig. 6 : Transition avec gradient de pression et turbulence extérieure ; critère de Dunham (Réf. 11).

Influence de la rugosité des parois

Des études expérimentales nombreuses, ont montré depuis longtemps, que l'amplification de la perturbation provoquée par une aspérité placée à la paroi dans une couche limite laminaire, peut conduire en aval à une transition généralisée. Il s'en dégage nettement qu'une distinction doit être faite entre les effets d'une rugosité bidimensionnelle, et ceux d'une rugosité tridimensionnelle.

Dans le premier cas l'augmentation de la dimension de la rugosité se traduit par une avance rapide mais progressive de la transition vers la perturbation. Dryden regroupe ainsi (Réf. 12) des résultats expérimentaux obtenus sur plaque plane, en

montrant que le déplacement relatif de la transition dépend essentiellement du rapport de la dimension verticale de la rugosité à l'épaisseur de déplacement de la couche limite laminaire (*figure 7*) ; la transition vient se fixer sur la perturbation pour un rapport  $k/\delta_1$  de l'ordre de l'unité.

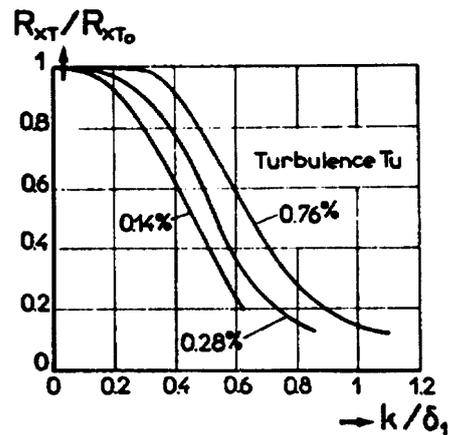


Fig. 7 : Transition provoquée par une rugosité bidimensionnelle (Dryden, Réf. 12).

L'effet d'une perturbation tridimensionnelle est beaucoup plus brutal, la transition venant se fixer subitement sur l'élément de rugosité pour une certaine dimension critique (*figure 8*) ; faisant intervenir le nombre de Reynolds  $R_k = \frac{U_k k}{\nu}$  formé avec la vitesse correspondant à  $y=k$  dans la couche limite laminaire, on trouve que la transition se produit pour une valeur de l'ordre de  $R_k = 500$ .

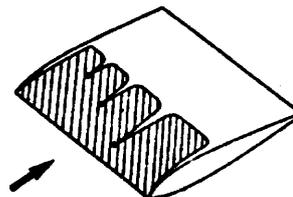
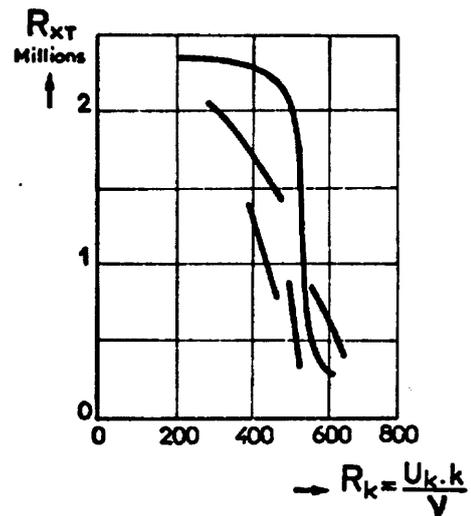


Fig. 8 : Transition provoquée par une rugosité tridimensionnelle (Dryden, Réf. 12).

La transition sur une paroi dont toute la surface est rugueuse, a été étudiée expérimentalement par Feindt (Réf. 13), qui met en jeu une rugosité répartie du type "grain de sable". Les résultats obtenus pour le nombre de Reynolds de transition (*figure 9*) ont pu être utilisés soit à titre de critère, soit pour la détermination de constantes empiriques intervenant dans les traitements de la transition par équations de transport.

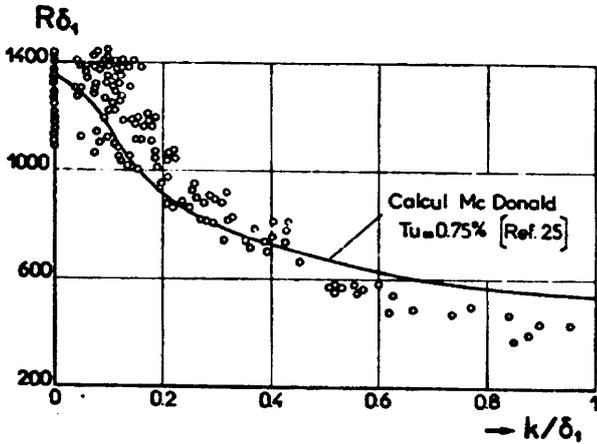


Fig. 9 : Transition sur une surface à rugosité répartie ; résultats expérimentaux de Feindt (Réf. 13).

### 2.3. Développement de la couche limite dans la région de transition.

Si l'on admet que les critères précédents sont capables de conduire à une prédiction de l'abscisse à laquelle apparaît la transition, il reste à estimer le développement de la couche limite lors du passage du régime laminaire au régime turbulent afin d'appliquer ensuite à partir de conditions initiales connues, les méthodes de calcul des couches limites turbulentes établies.

Il s'agit d'un problème actuel d'une grande importance, intéressant tout spécialement les études du couplage entre la couche limite et l'écoulement potentiel, pour lesquelles on ne peut évidemment plus se contenter de schématiser la transition par un passage brutal de propriétés laminares à des propriétés turbulentes avec une discontinuité inévitable des caractéristiques, notamment de l'épaisseur de déplacement.

Le phénomène physique ayant inspiré les techniques proposées pour traiter pratiquement cette question est celui de l'*intermittence* observée pendant la transition, et caractérisée par le passage successif d'écoulements laminares et de régions turbulentes dont l'importance augmente dans la direction de l'écoulement pour conduire au régime turbulent établi.

Une étude approfondie de l'intermittence faisant appel à l'analyse conditionnelle des fluctuations, a été effectuée au DERAT et donne lieu également à une communication à ce colloque (Réf. 14). On se limitera ici au rappel des résultats de Schubauer et Klebanoff (Réf. 15) qui représentent encore actuellement la base des méthodes proposées pour calculer la couche limite dans une région de transition.

Définissant le facteur d'intermittence  $\gamma$  comme le rapport du temps de passage  $T_t$  d'un "spot" turbulent au temps total  $T_t + T_l$ , ce facteur doit passer d'une valeur nulle au début de la transition, à la valeur unité en turbulent établi. La courbe d'évolution suivant l'abscisse, obtenue sur plaque plane incompressible par Schubauer et Klebanoff, est donnée *figure 10*.

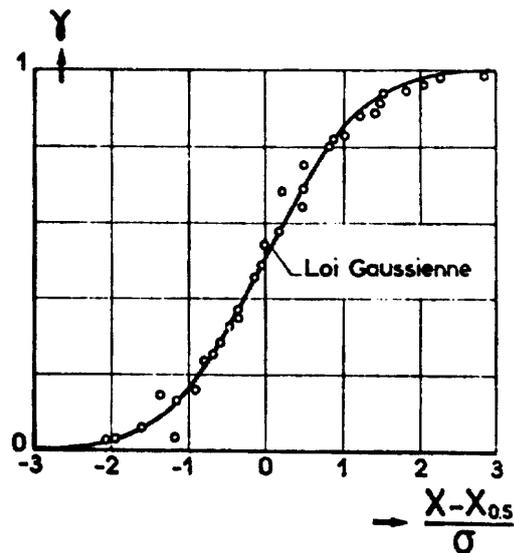


Fig. 10 : Facteur d'intermittence dans la région de transition sur plaque plane ; résultats de Schubauer et Klebanoff (Réf. 15) ;  $\sigma$  déviation standard permettant de ramener à une loi gaussienne.

Le principe des méthodes de calcul, consiste alors à pondérer au moyen du facteur d'intermittence des propriétés laminares et des propriétés d'écoulement turbulent établi, pour définir des propriétés moyennes d'écoulement transitionnel (*figure 11*).

Dans une technique de résolution numérique par différences finies des équations locales, la pondération portera sur le frottement local  $\tau$  dans la couche limite.

Une méthode pratique et rapide peut également être établie en faisant appel aux équations intégrales, spécialement bien sûr à l'équation de quantité de mouvement, et en appliquant la pondération aux relations auxiliaires concernant par exemple le coefficient de frottement de paroi et le paramètre de forme.

Méthode de différences finies

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{dP}{dx}$$

$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \tau_1$  avec  $\tau_1 = \gamma \tau_1$  établi

$\gamma$  variant de 0 à 1 dans la région de transition

Méthode intégrale

$$\frac{Cf}{2} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \theta \cdot H \cdot 2 \frac{dU_e}{dx}$$

avec

$Cf = (1-\gamma) Cf_{laminaire} + \gamma Cf_{turbulent}$

$H = (1-\gamma) H_{laminaire} + \gamma H_{turbulent}$

Fig. 11 : Principe de techniques pratiques de prévision du développement de la couche limite dans une région de transition.

Concernant le facteur d'intermittence, certains auteurs ont utilisé simplement la courbe de Schubauer et Klebanoff avec une hypothèse additionnelle sur l'étendue de la région de transition. Il semble cependant préférable de définir une hypothèse moins directement liée à une évolution particulière a priori au cas de la plaque plane, en cherchant à tenir compte notamment de l'influence des gradients de pression.

La figure 12 donne la formulation proposée par Cebeci (Réf. 16) avec un facteur d'intermittence appliqué à la viscosité turbulente. Une méthode faisant appel à un modèle de longueur de mélange a été mise au point au DERAT ; le facteur d'intermittence  $\gamma$  est supposé fonction de l'épaississement de la couche limite depuis le début de transition, ce qui permet, partant des résultats de plaque plane de Schubauer et Klebanoff, de tenir compte, par cet épaississement, de l'influence des gradients de pression.

CEBECI: facteur d'intermittence appliqué à la viscosité turbulente

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \gamma \mu_t \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\gamma = 1 - \exp(-8,33 \cdot 10^{-4} R_{x_1}^{0,666} U_e \frac{(x-x_1)}{x_1} \int_{x_1}^x \frac{dx}{U_e})$$

D.E.R.A.T.: facteur d'intermittence appliqué à la longueur de mélange

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \gamma \rho F^2 l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{l}{\delta} = 0,085 \operatorname{th} \left( \frac{0,4}{0,085} \frac{y}{\delta} \right) \\ F = 1 - \exp\left(\frac{(\tau_p)^{1/2} l}{10,66 \mu}\right) \end{array} \right.$$

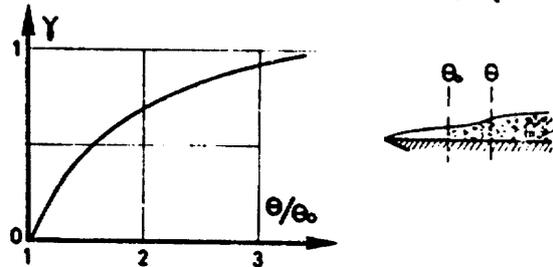


Fig. 12 : Hypothèses relatives au facteur d'intermittence (Réf. 16 et 17).

Quelques résultats typiques obtenus par la méthode du DERAT (Réf. 17) sont présentés sur les figures qui suivent :

- La figure 13 montre que la technique prédit effectivement des profils de vitesse qui passent du type laminaire au type turbulent en donnant lieu à un bon accord avec les profils relevés expérimentalement dans une région de transition.
- La figure 14, toujours relative au cas de la plaque plane, montre les résultats obtenus pour l'évolution du coefficient de frottement lors de calculs effectués à partir de différents nombres de Reynolds de début de transition. On y a porté également l'étendue de la transition en fonction du nombre de

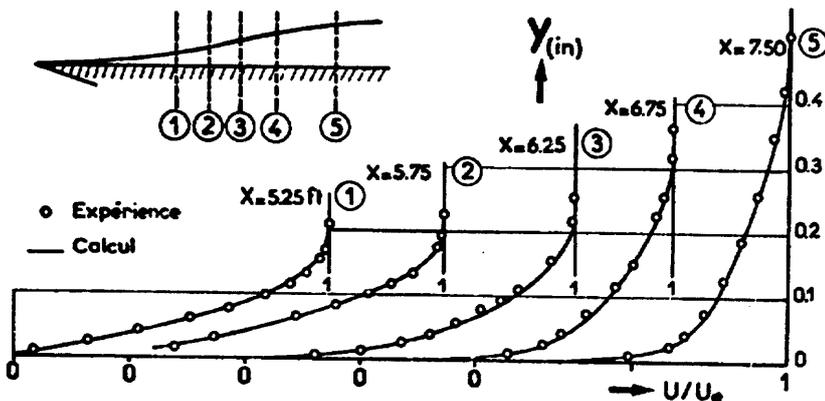


Fig. 13 : Profils de vitesse dans la région de transition sur plaque plane ; calcul par la méthode du DERAT et résultats expérimentaux de Schubauer et Klébanoff (Réf. 17).

Reynolds initial ; l'accord avec l'expérience paraît tout à fait satisfaisant pour les problèmes pratiques.

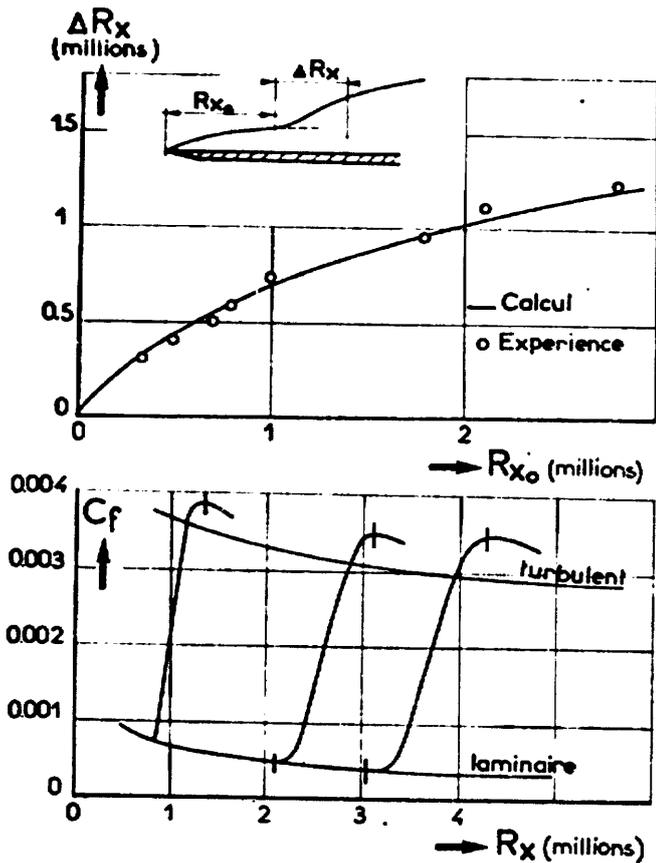


Fig. 14 : Calcul d'une région de transition débutant à différents nombres de Reynolds ; évolution du coefficient de frottement, et étendue de la région de transition (Ref. 17).

- La figure 15 donne les résultats d'un calcul effectué à partir d'un point de transition fixé, pour différentes distributions de la vitesse extérieure. On y observera par l'évolution du facteur d'intermittence aussi bien que par celle du paramètre de forme, le passage de plus en plus lent du laminaire au turbulent quand on passe des écoulements ralentis aux écoulements accélérés. En gradient de pression négatif suffisamment intense (courbes A) l'étendue de la transition devient considérable, les courbes pour  $\gamma$  et pour H montrant que la couche limite demeure sur une grande distance dans un état intermédiaire entre le laminaire et le turbulent.

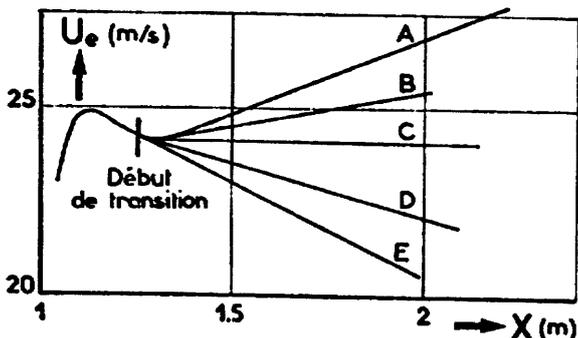


Fig. 15 : Calcul d'une région de transition à partir d'un début fixé, avec différents gradients de pression ; évolution du facteur d'intermittence et du paramètre de forme (Réf. 17).

### 3 - CALCUL DE LA TRANSITION AU MOYEN D'EQUATIONS DE TRANSPORT DE LA TURBULENCE

#### 3.1. Principe général. Equations de base.

Compte tenu du nombre de facteurs pouvant intervenir dans les problèmes pratiques, et de la complexité de leur influence, on a donc été amené, à rechercher des moyens de prévision qui puissent effectivement être considérés comme des méthodes de calcul, en ce sens que le traitement puisse être basé sur la résolution d'équations pour les grandeurs moyennes et fluctuantes, et que les facteurs agissants (gradient de pression, turbulence extérieure, notamment) y jouent simplement le rôle de conditions aux limites.

Devant l'impossibilité actuelle d'entrer réellement dans le problème de la transition par la théorie de l'instabilité laminaire, on s'est tourné vers la mise en oeuvre d'équations de transport et de modèles de turbulence, ayant conduit ces dernières années à des techniques rationnelles et générales de calcul des écoulements cisailés en turbulent établi. Postulant qu'on doit tendre après la transition vers le modèle qu'on a mis au point pour le turbulent établi, le problème est bien évidemment d'établir des hypothèses permettant d'adapter ce modèle de façon à y tenir compte des effets de la viscosité sur la turbulence, afin de décrire le développement de la turbulence pendant le phénomène de transition.

Notons qu'avant d'entreprendre le calcul de la transition, on a dû s'intéresser aux effets de

la viscosité pour le traitement de la région de paroi des écoulements turbulents ; c'est en fait à partir des propriétés indiquées par l'expérience pour la sous-couche visqueuse d'une couche limite turbulente qu'on a pu déterminer les fonctions empiriques de viscosité retenues ensuite pour le problème de la transition.

Un autre problème important est celui de la "relaminarisation" des écoulements turbulents ; on se limitera à rappeler que sa prévision théorique fait appel aux mêmes hypothèses relatives aux effets de la viscosité sur la turbulence et en fin de compte aux mêmes méthodes d'équations de transport que la transition elle-même.

Le principe général d'établissement des équations de transport de la turbulence est alors le suivant: De façon classique les grandeurs instantanées sont décomposées en une valeur moyenne et une fluctuation :

$$\begin{aligned} u &= U(x,y,z) + u'(x,y,z,t) \\ v &= V(x,y,z) + v'(x,y,z,t) \\ w &= W(x,y,z) + w'(x,y,z,t) \\ p &= P(x,y,z) + p'(x,y,z,t) \dots \text{etc...} \end{aligned}$$

Ces formes sont introduites dans l'équation de continuité et dans les équations de Navier-Stokes, écrites pour un écoulement considéré comme instationnaire. Avec la notation indicielle, en faisant pour simplifier l'hypothèse d'incompressibilité, les équations obtenues ainsi sont d'abord données figure 16.

### Equations de continuité et de NAVIER-STOKES

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (U_i + u'_i) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial (U_i + u'_i)}{\partial t} \cdot (U_i + u'_i) - \frac{\partial (U_i + u'_i)}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (P + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (U_i + u'_i)}{\partial x_i^2}$$

### Equation générale pour les tensions de REYNOLDS

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} &= -\overline{u'_k u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \overline{u'_k u'_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} & (I) \\ & - 2\nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_k} + \frac{\rho}{\rho} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} & (II) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_i u'_j u'_k} - \nu \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u'_i u'_j}) + \frac{\rho}{\rho} (\overline{u'_i \delta_{jk}} \cdot \overline{u'_j \delta_{ik}}) & (III) \\ & & (IV) \\ & & (V) \end{aligned}$$

Fig. 16 : Equations de base des méthodes de calcul des couches limites par équations de transport (exemple de l'incompressible).

Les équations de continuité et de quantité de mouvement du mouvement moyen s'obtiennent en prenant la moyenne dans le temps des équations précédentes et en les simplifiant au moyen des approximations de la couche limite.

Il est possible également d'établir par des opérations simples, des équations pouvant être relatives à toutes sortes de caractéristiques de la turbulence.

Tout particulièrement intéressante est une équation générale pour les tensions de Reynolds, écrite également figure 16, et qui s'obtient au moyen des opérations :

- multiplication par  $U'_j$  de l'équation de Navier projetée suivant  $x_i$ ,
- multiplication par  $U'_i$  de l'équation de Navier projetée suivant  $x_j$ ,
- sommation et moyenne dans le temps de l'équation finale.

Les différents termes de cette équation ont les désignations et les caractéristiques suivantes :

- (I) Taux de variation de  $u'_i u'_j$  le long d'une ligne de courant : *convection*,
- (II) terme de *production* (en particulier de  $\overline{u'v'}$ ) sous l'action du gradient de vitesse moyenne,
- (III) *dissipation* d'énergie turbulente,
- (IV) terme de *redistribution* (responsable du retour à l'isotropie en écoulement homogène),
- (V) transport par *diffusion*, dû au mouvement turbulent, à la viscosité, et à l'interaction entre les fluctuations de pression et de vitesse.

L'équation générale pour les tensions de Reynolds conduit à des équations de transport pour le frottement turbulent (c'est-à-dire en bidimensionnel pour  $\overline{u'v'}$ ) et pour les composantes  $\overline{u'^2}$ ,  $\overline{v'^2}$ ,  $\overline{w'^2}$  de la fluctuation de vitesse.

On se limite souvent en pratique au calcul de l'énergie cinétique totale :

$$K = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$$

Une équation de transport pour la dissipation apparaissant dans l'équation pour l'énergie cinétique, peut également être établie ; on la considèrera plus loin directement sous sa forme modélisée.

La technique générale des traitements consiste à joindre aux équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie du mouvement moyen, les équations de transport correspondant aux termes de turbulence que l'on cherche à calculer, et à résoudre le système par une technique numérique de différences finies.

Une phase préliminaire consiste à modéliser les termes des équations de transport. Comme il a été dit, cette modélisation a d'abord été faite

pour le régime turbulent et l'on s'attachera dans la présentation des méthodes, à bien préciser en premier lieu les hypothèses relatives aux couches limites turbulentes établies, en renvoyant cependant pour l'analyse et la justification détaillées au papier présenté à ce colloque par J. Cousteix (Réf. 19). On examinera ensuite comment ces hypothèses peuvent être adaptées pour tenir compte des effets de la viscosité sur la turbulence pour conduire à des méthodes de calcul de la transition.

### 3.2. Modèle à une équation de transport.

On désigne par là une méthode qui consiste à joindre aux équations du mouvement moyen une seule équation de transport. Elle est très généralement basée sur l'équation de transport pour l'énergie cinétique totale  $K$  de la turbulence ; une formulation à laquelle elle peut le plus souvent se ramener est présentée figure 17.

$$\frac{DU}{Dt} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

$$\frac{DK}{Dt} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - \epsilon - \frac{\partial}{\partial y} \left( K' \cdot \frac{P'}{\rho} \right) v'$$

#### Hypothèses

$$(1) \quad \frac{T_t}{\rho} = -\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{avec} \quad \nu_t = (2\alpha_1 K)^{1/2} L$$

Prandtl-Kolmogoroff

$$(2) \quad \epsilon = \frac{(2\alpha_1 K)^{3/2}}{L}$$

$$(3) \quad \left( K' \cdot \frac{P'}{\rho} \right) v' = -(2\alpha_1)^2 C_K K^2 L \frac{\partial K}{\partial y}$$

•  $L$ : longueur d'échelle type longueur de mélange

•  $\alpha_1 = 0,15$ : rapport  $\frac{\overline{u'v'}}{2K}$  dans C.L.T. classique

•  $C_K$ : optimisation numérique ( $C_K = 1$ )

Fig. 17 : Modèle à une équation de transport ; formulation pour le turbulent établi.

L'équation pour  $K$  fait intervenir trois inconnues supplémentaires qui sont le frottement turbulent, la dissipation et le terme de diffusion.

Pour le frottement turbulent, on utilise très généralement la classique formule de Prandtl-Kolmogoroff, dans laquelle la viscosité turbulente apparaît comme le produit de  $K$  par une longueur d'échelle de la turbulence; le coefficient  $\alpha_1$  est lié au rapport du frottement  $\overline{u'v'}$  à l'énergie cinétique, sensiblement constant d'après les observations expérimentales dans toute une partie d'une

couche limite turbulente classique, et particulièrement dans la région turbulente de paroi.

Pour la dissipation, une hypothèse également très souvent retenue est de la relier à l'énergie cinétique et à une longueur d'échelle. Un raisonnement dimensionnel dont la justification détaillée pourra être trouvée dans Rotta (Réf. 18), conduit à la formule donnée figure 17.

Enfin le terme de diffusion est souvent exprimé par la loi en gradient donnée figure 17, ceci par analogie avec l'expression du frottement turbulent, qui représente le terme de diffusion dans l'équation du mouvement moyen.

Le reproche évident que l'on peut faire à un modèle à une seule équation de transport est qu'il fait intervenir une longueur d'échelle pour laquelle il doit être fait appel à l'empirisme et qui va dépendre en fait du type d'écoulement turbulent cisailé que l'on considère. Le modèle à une équation ne présente guère d'avantages par rapport au simple schéma de longueur de mélange ; la longueur d'échelle s'exprime d'ailleurs par des relations  $L/\delta$  en fonction de  $Y/\delta$  tout à fait comparables à celles qu'on peut retenir pour la longueur de mélange.

Un modèle à une équation, permettant le calcul de la transition, a été proposé par Beckwith et Bushnell (Réf. 20) ; sa formulation est rappelée figure 18, où l'on a cherché à préciser par des flèches, les modifications apportées à la modélisation du turbulent établi ; elles sont de deux types :

- adjonction de termes visqueux, bien entendu dans l'expression du frottement, mais aussi dans celles de la dissipation et de la diffusion,  
- modification des expressions du frottement turbulent, et des termes "turbulents" de la dissipation et de la diffusion ; les formules du turbulent établi se trouvent multipliées par des fonctions correctrices  $h_1, h_2$  et  $g$  qui dépendent par des relations inévitablement empiriques d'un nombre de Reynolds de la turbulence :

$$R_t = \frac{K^{1/2} L}{\nu}$$

On observera en formant le rapport  $\nu_t/\nu$ , que ce nombre de Reynolds de turbulence est directement relié au rapport du frottement turbulent au frottement laminaire, et qu'il représente donc bien en quelque sorte le degré de turbulence de l'écoulement. Nul en écoulement laminaire il tend vers l'infini en turbulent établi ; les fonctions  $h_1$  et  $h_2$  sont nulles pour  $R_t = 0$  afin que demeurent seuls les termes visqueux ; elles sont égales à l'unité (ainsi que  $g$ ) quand  $R_t$  tend vers l'infini afin de retrouver la formulation du turbulent établi.

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\frac{DK}{Dt} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} (v_t + g v_t \frac{\partial K}{\partial y})$$

$$-\overline{u'v'} = v_t \frac{\partial U}{\partial y} \text{ avec } v_t = h_1 (2\alpha_1 K)^{1/2} L$$

$$\varepsilon = 0,63 \frac{v_t K}{L} + h_2 \frac{(2\alpha_1 K)^{3/2}}{L}$$

Les fonctions de viscosité sont des fonctions empiriques du nombre de REYNOLDS de turbulence:

$$R_t = \frac{K^{1/2} L}{\nu}$$

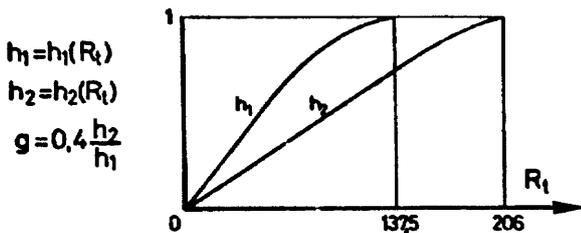


Fig. 18 : Modèle à une équation de transport avec effets de viscosité ; formulation de Beckwith et Bushnell (Réf. 20).

3.3. Modèles à deux équations de transport.

On cherche à y éliminer une large part de l'empirisme intervenant dans le modèle à une seule équation, en faisant appel à une seconde équation de transport destinée à décrire le développement de l'échelle de turbulence, ou celui de caractéristiques de turbulence qui peuvent lui être reliées. On considérera ainsi pour la transition un modèle qui consiste à joindre à l'équation pour l'énergie cinétique une équation pour la dissipation (modèle  $K, \varepsilon$ ) et un modèle où l'on met en oeuvre une équation pour le rotationnel (modèle  $K, \omega$ ).

3.31. Modèle  $K, \varepsilon$

Considérant d'abord l'écoulement turbulent établi, il est bien évident si l'on admet la forme en  $K^{3/2}/L$ , que la dissipation  $\varepsilon$  est directement liée à l'échelle de la turbulence. Une équation de transport pour la dissipation, est ainsi utilisée par Hanjalic et Launder (Réf. 21) dans un modèle à deux équations de transport, dont la formulation générale est donnée figure 19, les équations étant écrites directement sous leur forme modélisée.

$\frac{DU}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \right)$	$\tau = \tau_t = \mu_t \frac{\partial U}{\partial y}$
$\frac{Dh_t}{Dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (U \tau_t - \Phi)$	$\Phi = \Phi_t = \frac{\mu_t}{\rho} \frac{\partial h}{\partial y}$

$$\frac{DK}{Dt} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} (C_k v_t \frac{\partial K}{\partial y})$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \frac{\partial}{\partial y} (C_c v_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial y})$$

$$-\overline{u'v'} = v_t \frac{\partial U}{\partial y} \text{ avec } v_t = (2\alpha_1)^{1/2} \frac{K^2}{\varepsilon}$$

► Constantes  $C_k, C_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, \alpha_1$  choisies pour:

- existence d'une loi logarithmique de paroi ( $l=0,41y$ )  $C_{\varepsilon 1} = C_{\varepsilon 2} - C_c \frac{(0,41)^2}{2\alpha_1}$
- rapport  $\tau_t/2\rho k = \alpha_1$  près de la paroi pour une C.L.I classique  $\alpha_1 = 0,15$
- décroissance de la turbulence derrière une grille  $C_{\varepsilon 2} = 2$
- optimisation numérique  $C_k = 1 \quad C_c = 0,7$

Fig. 19 : Modèle à deux équations de transport ( $\kappa$  et  $\varepsilon$ ) ; formulation pour le turbulent établi ; Hanjalic et Launder (Réf. 21).

Pour le frottement turbulent, on utilise encore la formule de viscosité turbulente ; l'intérêt évident est qu'elle peut être exprimée en fonction des deux variables  $K$  et  $\varepsilon$  que l'on va calculer, sans faire intervenir la longueur d'échelle qui s'élimine entre les relations (1) et (2) du modèle à une équation de la figure 17.

La modélisation du terme de diffusion de l'équation de l'énergie cinétique est toujours la loi en gradient dans laquelle on exprime aussi la longueur d'échelle en fonction des variables à calculer.

Des hypothèses du type gradient et des considérations dimensionnelles conduisent à la forme modélisée donnée pour l'équation de transport de la dissipation.

Les constantes empiriques apparaissant dans les équations sont choisies en fin de compte de façon à vérifier des propriétés bien établies par l'expérience, concernant notamment le voisinage de la paroi dans une couche limite turbulente.

Un modèle  $K, \varepsilon$  dans lequel il est tenu compte de la viscosité a été établi par Jones et Launder (Réf. 22) à l'origine dans le but de traiter la re-laminarisation. Il a été également mis en oeuvre au DERAT dans des applications systématiques dont on présentera plus loin les résultats. Sa formulation donnée figure 20, précise les modifications apportées à la modélisation du turbulent établi :

- adjonction des termes visqueux dans le frottement et le flux de chaleur et dans les termes de diffusion des équations pour K et ε ,  
 - termes additionnels  $2\nu \frac{\partial K^{1/2}}{\partial y}$  et  $2\nu \frac{\partial \epsilon}{\partial y}$  justifiés essentiellement par le souci de retrouver le comportement parabolique de l'énergie cinétique près de la paroi et de respecter la valeur trouvée expérimentalement pour son maximum dans la sous-couche visqueuse d'une couche limite turbulente,  
 - intervention de fonctions correctrices de viscosité dans la viscosité turbulente et dans la "dissipation de la dissipation", (la seconde jouant en fait un faible rôle dans les applications du calcul) ; elles sont à nouveau supposées dépendre d'un nombre de Reynolds de turbulence :

$$R_t = \frac{K^2}{\nu \epsilon}$$

bien évidemment lié directement au rapport  $\lambda_t/\nu$  du frottement turbulent au frottement laminaire.

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y} \quad \phi = - \left( \frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu_t}{\rho} \right) \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{DK}{Dt} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - \epsilon + 2\nu \frac{\partial (K^{1/2})}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\nu + C_\mu \nu_t) \frac{\partial K}{\partial y}$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -C_\epsilon \frac{\epsilon}{K} \overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - f_2 C_\epsilon \frac{\epsilon^2}{K} + 2\nu \frac{\partial \epsilon}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\nu + C_\epsilon \nu_t) \frac{\partial \epsilon}{\partial y}$$

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{avec} \quad \nu_t = f_\mu (2\alpha_1)^2 \frac{K^2}{\epsilon}$$

Les fonctions de viscosité sont des fonctions empiriques du nombre de REYNOLDS de turbulence

$$R_t = \frac{\rho K^2}{\mu \epsilon}$$

$$f_2 = 1 - 0,3 \exp(-R_t^2)$$

$$f_\mu = \exp\left(\frac{-2,5}{1 + R_t/50}\right)$$

Fig. 20 : Modèle K,ε avec effets de viscosité ; formulation de Jones et Launder (Réf. 22).

3.32. Modèle K,ω

Un modèle faisant intervenir comme seconde équation de transport une équation pour le module du vecteur rotationnel correspondant aux fluctuations de vitesse a été établi par Saffman (Réf. 23) en turbulent, puis modifié par Wilcox (Réf. 24) pour le calcul de la transition.

La formulation du turbulent établi est d'abord présentée figure 21.

Partant de l'équation déjà vue précédemment pour l'énergie cinétique, deux relations fondamentales sont d'abord introduites :

tales sont d'abord introduites :

- la première fait l'hypothèse d'un rapport constant entre le frottement turbulent et l'énergie cinétique,
- la seconde exprime la dissipation comme produit de l'énergie cinétique et du rotationnel, ω devenant la variable pour laquelle on va établir une équation de transport.

L'équation pour K prend ainsi la nouvelle forme donnée par la formule (3).

L'équation (4) pour ω est de caractère essentiellement intuitif.

Une hypothèse de viscosité turbulente est en fin de compte adoptée pour le frottement turbulent, qui reprend simplement, avec les nouvelles variables K et ω, celle du modèle K, ε.

$$\frac{DK}{Dt} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} - \epsilon + \frac{\partial}{\partial y} (C_\mu \nu_t \frac{\partial K}{\partial y})$$

Hypothèses fondamentales

(1)  $-\overline{u'v'} = 2\alpha_1 K$

(2)  $\epsilon = (2\alpha_1)^2 \omega K$

Equations de transport (forme finale)

(3)  $\frac{DK}{Dt} = 2\alpha_1 K \frac{\partial U}{\partial y} - (2\alpha_1)^2 \omega K + \frac{\partial}{\partial y} (C_\mu \nu_t \frac{\partial K}{\partial y})$

(4)  $\frac{D\omega}{Dt} = \alpha_1 \omega^2 \frac{\partial U}{\partial y} - 2(2\alpha_1)^2 \omega^3 + \frac{\partial}{\partial y} (C_\omega \nu_t \frac{\partial \omega}{\partial y})$

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{avec} \quad \nu_t = \frac{K}{\omega}$$

Constantes:  $\alpha_1 = 0,15 \quad \alpha_1 = 0,26 \quad C_\mu = C_\omega = 0,5$

Fig. 21 : Modèle à deux équations de transport (K et ω) ; formulation pour le turbulent établi, Saffman (Réf. 23).

La modification apportée par Wilcox pour faire intervenir la viscosité est formulée figure 22 :

- adjonction à nouveau des termes visqueux dans le frottement turbulent et dans les termes de diffusion des deux équations de transport,
- intervention d'une même fonction correctrice de viscosité sur les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_1$ , fonction qui dépend du nombre de Reynolds de turbulence :

$$R_t = \frac{K}{\nu \omega} = \frac{\nu \epsilon}{\nu^2}$$

$$\tau = (\mu + \mu_t) \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\frac{DK}{Dt} = 2\alpha_1 f K \frac{\partial U}{\partial y} - (2\alpha_1)^2 \omega K \cdot \frac{\partial}{\partial y} (v + c_w v_t) \frac{\partial K}{\partial y}$$

$$\frac{D\omega^2}{Dt} = \alpha_1 f \omega^2 \frac{\partial U}{\partial y} - 2(2\alpha_1)^2 \omega^3 \frac{\partial}{\partial y} (v + c_w v_t) \frac{\partial \omega^2}{\partial y}$$

$$-\overline{uv} = (v + \frac{K}{\omega}) \frac{\partial U}{\partial y}$$

La fonction de viscosité  $f$  est une fonction empirique du nombre de REYNOLDS de turbulence

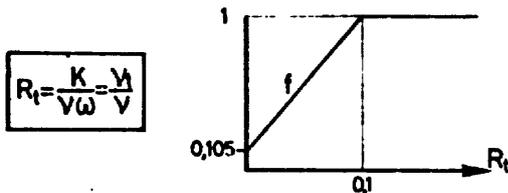


Fig. 22 : Modèle  $K, \omega$  avec effets de viscosité ; formulation de Wilcox (Réf. 24).

3.4. Equation intégrale pour l'énergie cinétique de turbulence.

Une technique destinée à donner lieu à une programmation moins lourde et à un calcul a priori plus rapide que les modèles considérés précédemment, consiste en un modèle dans lequel on joint aux équations du mouvement moyen, une équation différentielle ordinaire, que l'on obtient au moyen de l'équation de transport de l'énergie cinétique de turbulence intégrée suivant la normale à la paroi dans toute l'épaisseur de la couche limite.

Une telle méthode a été proposée par Mac. Donald (Réf. 25) et tout récemment à l'Ecole Centrale de Lyon par Mari et Mathieu (Réf. 26).

La formulation de Mac. Donald est d'abord donnée figure 23 pour les couches limites turbulentes établies.

L'intérêt de la méthode est notamment de faire disparaître la diffusion, dont l'intégrale dans l'épaisseur de la couche limite est nulle si l'on admet qu'il n'y a pas de corrélation entre les fluctuations de pression et de vitesse dans l'écoulement extérieur. La difficulté est qu'il est nécessaire de faire appel à des relations fonctionnelles pour les longueurs d'échelle, afin de représenter les différents termes

de turbulence et de dissipation dont on doit effectuer l'intégration.

$$\frac{d}{dx} \int_0^\delta \rho U K dy = \int_0^\delta -\rho \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} dy - \int_0^\delta \rho (\overline{u^2} - \overline{v^2}) \frac{\partial U}{\partial x} dy - \int_0^\delta \rho \varepsilon dy + E$$

avec  $E = K_e (\rho_e U_e \frac{d\delta}{dx} - \rho_e V_e) - (\overline{p'v'})_e$

Hypothèses

$$-\overline{uv} = 2\alpha_1 K \quad \frac{\overline{u^2}}{2} = 0,5K \quad \frac{\overline{v^2}}{2} = 0,2K$$

$$\varepsilon = \frac{(-\overline{uv})^{3/2}}{L} \quad \text{avec} \quad \frac{L}{\delta} = 0,1 \operatorname{th} \left( \frac{0,4}{0,1} \frac{y}{\delta} \right)$$

$$-\overline{uv} = f^2 \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad \text{avec} \quad \frac{f}{\delta} = \frac{f_e}{\delta} \operatorname{th} \left( 0,4 \frac{y}{\delta} \right)$$

Le niveau extérieur de longueur de mélange devient l'inconnue et se calcule en résolvant l'équation pour  $K$  intégrée.

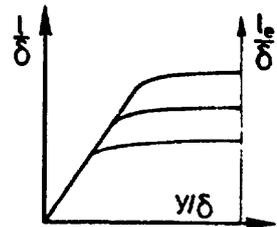


Fig. 23 : Méthode utilisant une équation intégrale pour l'énergie de turbulence ; formulation en turbulent ; Mc. Donald (Réf. 25).

Les hypothèses mises en oeuvre par Mac. Donald sont d'un type tout à fait classique pour une couche limite turbulente :

- proportionnalité entre le frottement turbulent et l'énergie cinétique de turbulence,
- répartition correspondant aux observations expérimentales pour les trois composantes de l'énergie cinétique,
- dissipation du type  $K^{3/2}/L$  où  $L$  est une longueur de dissipation pour laquelle est retenue une fonction universelle de  $y/\delta$ ,
- frottement turbulent exprimé par une formulation de longueur de mélange, mais son niveau extérieur, variable suivant l'abscisse, se calcule en résolvant l'équation pour  $K$ .

La figure 24 reprend les hypothèses, lorsqu'on veut y tenir compte des effets de la viscosité pour calculer la transition.

Une fonction correctrice de viscosité apparaît dans les formules pour la dissipation et pour le frottement. Tout à fait comparable à la fonction  $F$  que nous avons introduite dans nos formulations de longueur de mélange, elle dépend comme elle de la variable de paroi généralisée, dont on peut à

nouveau montrer qu'elle est directement liée au rapport du frottement turbulent au frottement laminaire. Mac. Donald propose aussi une correction supplémentaire destinée à tenir compte des effets de la rugosité des parois.

► Modification des hypothèses

$-\overline{u'v'} = 2\alpha K$ ( $\alpha$ variable)
$\epsilon = \frac{(-\overline{u'v'})^2}{2L}$
$-\overline{u'v'} = 2^2 l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2$

► Fonction de viscosité  $\mathcal{D}$

Paroi lisse :  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^{1/2} \frac{y-23}{8}$  avec  $y = \frac{(10)^{1/2} y}{\mu}$

Paroi rugueuse :  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{lisse} + \Delta \mathcal{D}_k$   
 $\Delta \mathcal{D}_k = \left(1 + \frac{k}{30y}\right) \exp\left(\frac{-23y}{k}\right)$

► Le rapport  $\alpha = -\overline{u'v'}/2K$  est une fonction empirique du nombre de REYNOLDS de turbulence

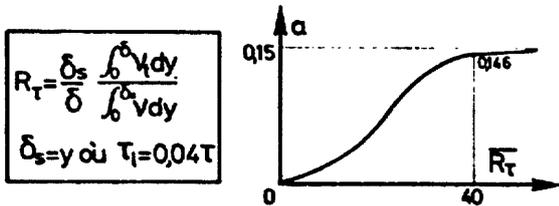


Fig. 24 : Méthode utilisant une équation intégrale pour l'énergie de turbulence ; formulation avec effets de viscosité ; Mc. Donald (Réf. 25).

Le rapport du frottement turbulent à l'énergie cinétique de turbulence, dépend aussi du degré de turbulence de l'écoulement ; un second paramètre  $\overline{R}_T$  est introduit, lequel est nul en laminaire, et tend vers l'infini pour le turbulent établi ;  $\alpha$  est nul en début de transition et tend vers la valeur classique 0,15 en turbulent établi.

On notera le rôle essentiel joué par la turbulence extérieure dans le terme de source E de l'équation intégrale d'énergie cinétique. Aucune turbulence ne peut se développer dans la couche limite, à partir d'un état laminaire, si ce terme de source est nul ; on trouvera donc dans les résultats un nombre de REYNOLDS de transition qui tendra vers l'infini quand la turbulence extérieure tendra vers zéro. On soulignera cependant la présence d'un terme acoustique de corrélation pression-vitesse, dont il n'a en fait pas encore été tenu compte dans les applications, mais qui peut bien évidemment jouer un

rôle très direct dans le développement de la turbulence de couche limite. Il s'agit là d'une propriété qui tend en fait à être confirmée de façon au moins qualitative par des études expérimentales récentes dans lesquelles on s'est intéressé aux effets acoustiques sur la transition en écoulement extérieur faiblement turbulent. Ceci était moins évident avec l'équation d'énergie cinétique locale où la turbulence extérieure n'apparaît que comme une condition limite dont il est a priori difficile de prévoir le rôle ; la modélisation impliquait par ailleurs une corrélation pression-vitesse, donc un terme acoustique, nuls à la frontière de la couche limite.

3.5. Exemples d'applications et de résultats.

On présentera pour illustrer les résultats auxquels peut conduire le calcul de la transition par un système d'équations de transport, un certain nombre d'applications effectuées au DERAT par D. Arnal lors d'une mise en oeuvre systématique du modèle K,  $\epsilon$ .

L'analyse a porté d'abord sur les fonctions de viscosité et tout spécialement sur la fonction  $f_\mu$  de la loi de frottement ; elle résulte en fait comme on l'a dit des propriétés observées expérimentalement pour la sous-couche visqueuse d'une couche limite turbulente ; différentes formes ont pu en être déterminées en combinant les résultats expérimentaux avec un traitement de la région de paroi ; les résultats que l'on va présenter ont été obtenus avec la fonction  $f_\mu$  de la figure 20, proposée par Jones et Launder.

Des résultats encourageants ont d'abord été obtenus en montrant que le modèle est effectivement capable de donner lieu à un amortissement ou à une amplification convenables des perturbations. La figure 26 montre le résultat d'un calcul à l'origine duquel une perturbation importante (profil d'intensité de turbulence atteignant un maximum de 3 %) est introduite dans une couche limite laminaire de plaque plane à un nombre de Reynolds faible. On voit que la perturbation est rapidement amortie pour revenir à un niveau très faible qu'elle conserve sur une grande distance. Une amplification correspondant à la transition se produit ensuite à un nombre de Reynolds dont l'ordre de grandeur correspond bien à ce qu'on peut attendre pour le niveau de turbulence extérieure considéré.

Différentes applications systématiques ont alors été effectuées, portant sur l'influence des principaux facteurs agissant sur la transition.

Les figures 26 et 27 sont relatives à la transition sur plaque plane en fluide incompressible, sous l'effet de la turbulence extérieure. La figure 26 donne le résultat obtenu pour le coefficient de

frottement de paroi, dans un calcul effectué successivement pour différentes valeurs de l'intensité de turbulence ; il met bien en évidence le passage d'une loi laminaire à une loi turbulente à partir d'un nombre de Reynolds qui décroît rapidement

quand la turbulence augmente. La figure 27 compare aux résultats expérimentaux disponibles le nombre de Reynolds calculé pour le début de la transition ; l'accord peut y être considéré comme des plus encourageants.

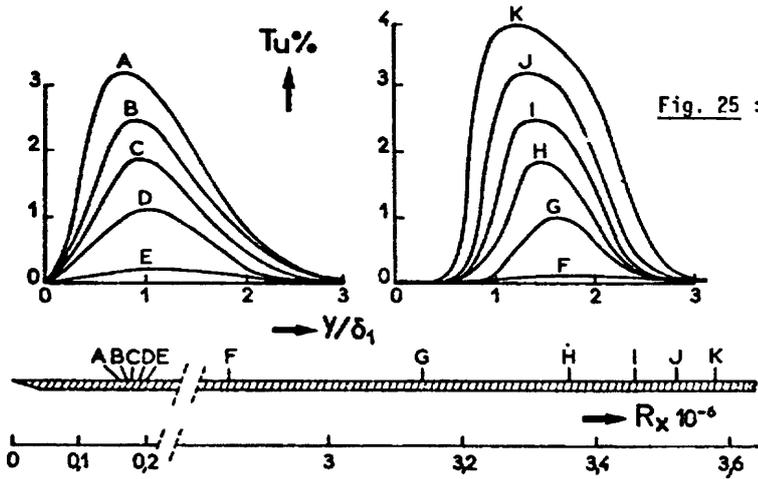


Fig. 25 : Amortissement et amplification d'une perturbation introduite dans la couche limite laminaire ; calcul DERAT par modèle K,ε . (turbulence extérieure 0,02 %).

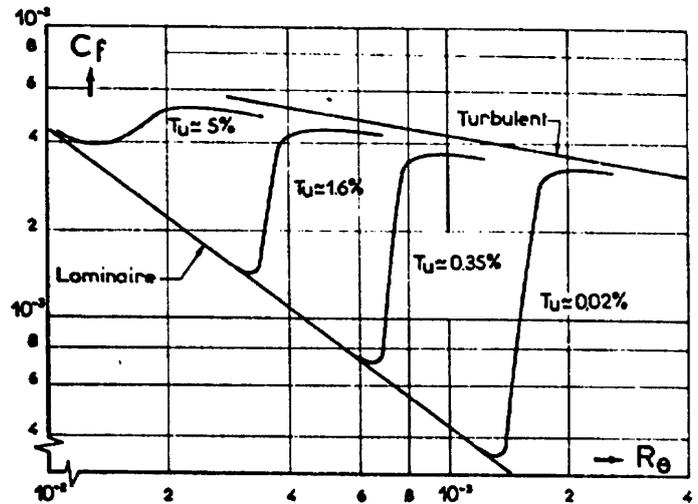


Fig. 26 : Transition sur plaque plane incompressible pour différentes turbulences extérieures ; évolution du coefficient de frottement ; calcul DERAT par modèle K,ε .

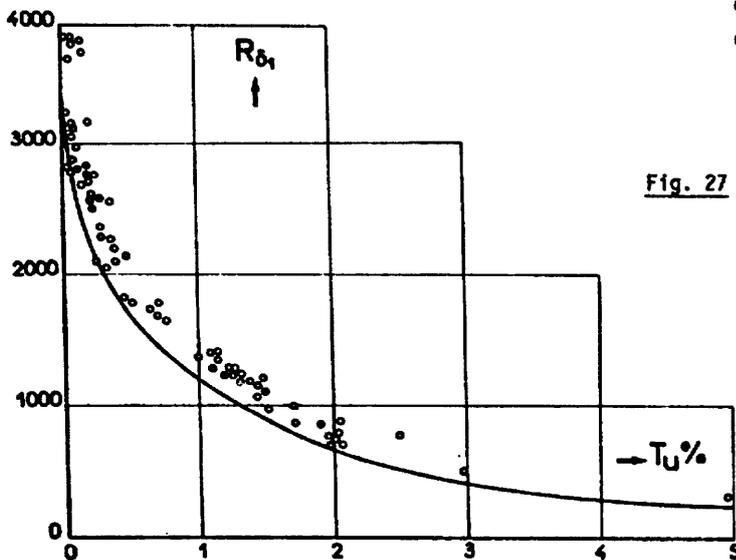


Fig. 27 : Début de transition sur plaque plane en fonction de la turbulence extérieure ; calcul DERAT par modèle K,ε et résultats expérimentaux.

La figure 28 toujours relative au cas de la plaque plane, a pour but de contrôler la méthode de calcul en ce qui concerne l'évolution de la couche limite dans la région de transition. L'accord obtenu avec les résultats expérimentaux de Van der Hegge Zijnen (Réf. 27) pour l'évolution du paramètre de forme et de l'épaisseur de quantité de mouvement est satisfaisant.

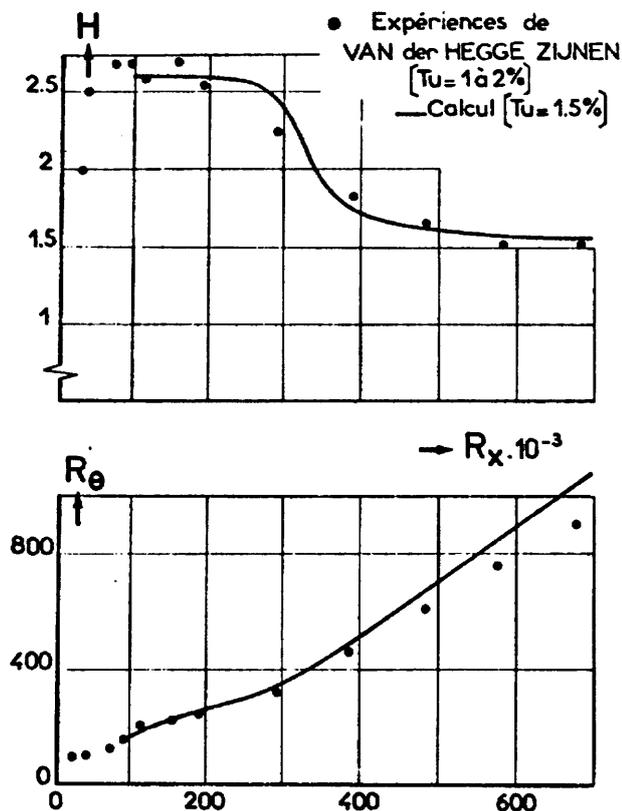


Fig. 28 : Evolution du paramètre de forme et de l'épaisseur de quantité de mouvement lors du développement de la transition ; calcul DERAT par modèle  $K, \epsilon$  et résultats expérimentaux de Van der Hegge Zijnen (Réf. 27).

Un bon accord a également été obtenu pour les caractéristiques moyennes de la couche limite, avec les résultats de l'étude expérimentale approfondie de la transition en gradient de pression nul effectuée au DERAT. On trouvera les détails de la comparaison entre ces expériences et le modèle  $K, \epsilon$  dans le papier de D. Arnal et J.C. Juillen (Réf. 14). Une cohérence générale a pu aussi y être réalisée au niveau des grandeurs fluctuantes ; l'expérience met cependant en évidence un certain nombre de phénomènes complexes, principalement une intermittence caractérisée dans le développement de la turbulence, que le modèle de calcul actuel ne peut évidemment reproduire.

La méthode de calcul a été appliquée dans une étude de l'influence des gradients de pression et de la combinaison de cette influence avec celle de la turbulence extérieure ; des résultats cohérents avec le critère de Dunham ont été obtenus.

On a pu considérer enfin les effets combinés de la turbulence, du gradient de pression et du flux de chaleur à la paroi, en particulier dans une application au calcul de la couche limite et du transfert de chaleur d'aubes de turbines.

La figure 29 donne ainsi les résultats obtenus dans le cas des expériences effectuées par Turner (Réf. 28) sur un profil d'aube de turbine refroidi, ceci pour trois niveaux de turbulence extérieure.

A l'extrados, la transition à faible turbulence extérieure est certainement due à un décollement laminaire qui se produit dans le gradient de pression positif affectant la partie arrière du profil. Elle a lieu très près du bord d'attaque à 5,9 % de turbulence. Au niveau intermédiaire une très forte sensibilité du calcul a pu être observée ; aucune transition n'a été obtenue avant le décollement laminaire

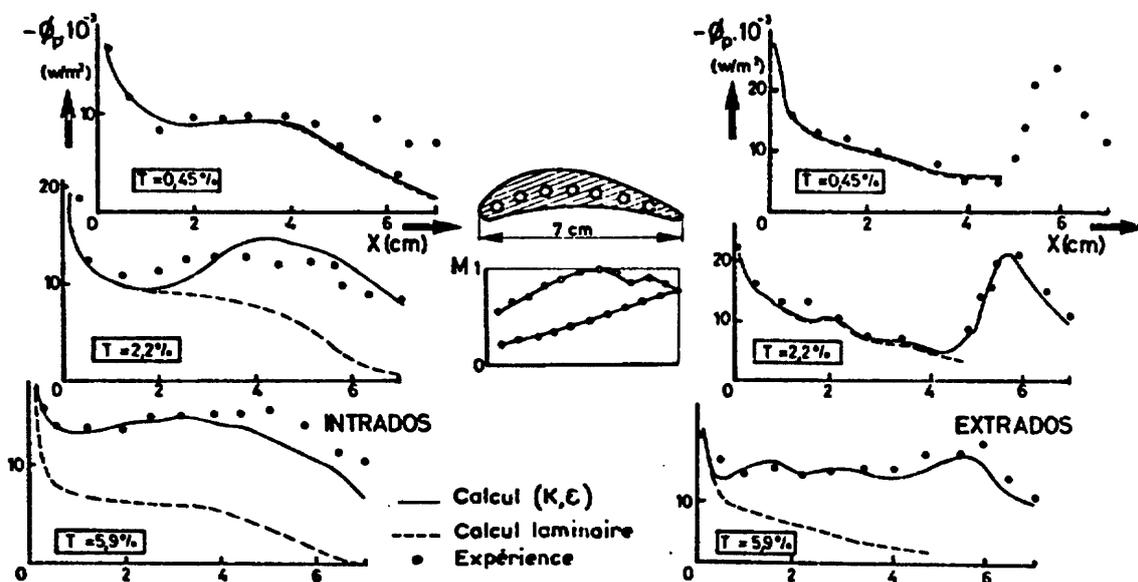


Fig. 29 : Flux de chaleur à la paroi d'aubes de turbine ; calcul DERAT par modèle  $K, \epsilon$  et résultats expérimentaux de Turner (Réf. 28).

au niveau de 2,2 % annoncé pour l'expérience mais il a suffi de le faire passer à 2,4 % pour obtenir une transition et des flux de chaleur en bon accord avec l'expérience.

A l'intrados, les distributions mesurées et calculées pour le flux de chaleur sont en bon accord aux trois niveaux de turbulence. La couche limite demeure laminaire sur toute la longueur du profil à faible turbulence ; elle est turbulente pratiquement dès le bord d'attaque à 5,9 % de turbulence. Une observation intéressante est à faire pour le niveau intermédiaire : la couche limite cesse d'être laminaire entre  $x = 1$  cm et 2 cm, mais la présence d'un gradient de pression négatif s'oppose au développement de la turbulence et fait demeurer la couche limite dans un état intermédiaire entre le laminaire et le turbulent sur la plus grande partie du profil.

Des résultats assez comparables aux précédents ont pu être obtenus au moyen des autres modèles, notamment par Wilcox et par Mac. Donald. On citera pour terminer deux exemples portant sur les effets de la rugosité de paroi.

Une application par Mac. Donald de sa méthode basée sur l'équation intégrale de l'énergie cinétique dans les conditions des expériences de Feindt a conduit comme on peut l'observer *figure 9* à un accord très raisonnable.

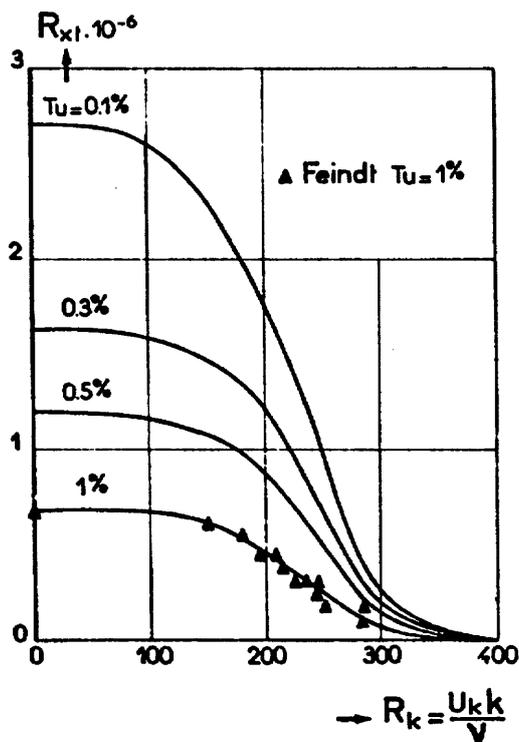


Fig. 30 : Effets combinés de la turbulence extérieure et d'une rugosité de surface répartie ; calcul Wilcox par modèle  $K, \omega$  (Réf. 24).

Wilcox est par définition en accord avec les expériences de Feindt, puisqu'il les utilise pour établir la formulation empirique permettant dans sa méthode de tenir compte de la rugosité. Il en déduit, *figure 30*, des résultats intéressants relatifs à l'influence combinée de la rugosité de paroi et de la turbulence extérieure, à propos de laquelle très peu d'informations sont encore actuellement disponibles.

#### 4 - CONCLUSIONS

On peut conclure d'abord de la première partie de cet exposé, qu'il existe bien sûr un certain nombre de critères empiriques permettant dans certaines conditions d'aboutir à une estimation du nombre de Reynolds auquel se produit la transition ; on dispose également de techniques approchées grâce auxquelles le développement de la couche limite du régime laminaire au régime établi peut être prédit de façon raisonnable.

Sans négliger ces moyens empiriques, qui représentent encore actuellement les seules techniques de prédiction pratique du phénomène de transition, il convient d'être des plus circonspect dans leur application.

Le moyen devant permettre dans un avenir proche une prévision plus sûre, prenant en compte rationnellement l'influence à priori très complexe des facteurs pouvant intervenir dans les problèmes pratiques, semble bien devoir entrer aussi intimement que possible dans l'analyse de la structure de la turbulence en faisant appel à des équations de transport des différentes caractéristiques de la turbulence.

Des modèles définis d'abord pour les écoulements turbulents établis, puis modifiés pour y tenir compte des effets de la viscosité sur la turbulence ont déjà conduit à de véritables méthodes de calcul, prévoyant de façon très prometteuse l'influence des principaux facteurs agissant sur la transition, au moins dans le domaine des écoulements incompressibles ou faiblement compressibles. Il reste essentiellement à en assurer le contrôle par des applications étendues et des comparaisons systématiques à l'expérience.

L'avenir est cependant à une analyse approfondie des processus fondamentaux qui régissent la transition. L'expérience montre déjà qu'il y intervient des phénomènes d'une grande complexité, tout particulièrement une intermittence dont il ne peut être tenu compte, dans aucun des modèles actuels, et qui rend encore illusoire la prédiction du développement des grandeurs fluctuantes.

Seule l'application de techniques modernes de traitement des résultats expérimentaux, comme l'analyse conditionnelle du signal, doit pouvoir conduire à une compréhension approfondie de l'intermittence et en fin de compte à une modélisation qui en tienne

compte dans des méthodes de prévision perfectionnées.

On regrettera enfin qu'il ne soit tenu compte dans les méthodes actuelles que de l'énergie moyenne des fluctuations, et que la répartition en fréquence, n'ait encore donné lieu qu'à des études des plus fragmentaires.

Une telle simplification ne peut être valable que pour des configurations particulières, notamment pour la transition à basse vitesse en soufflerie, où le spectre de la turbulence extérieure est le plus souvent assez proche de celui d'une turbulence de grille. On a souligné cependant que des perturbations acoustiques peuvent intervenir aux faibles niveaux de turbulence et jouer un rôle direct sur le développement de la turbulence de couche limite ; certains résultats expérimentaux, particulièrement ceux de Spangler et Wells (Réf. 29), ont déjà montré que le nombre de Reynolds de transition peut dépendre très largement de la fréquence considérée.

Un problème essentiel est donc celui de la "réceptivité" de la couche limite, vis à vis des fréquences qui transportent l'énergie des fluctuations. On trouvera dans le papier de Arnal et Juillen (Réf. 14), quelques premiers résultats montrant comment le spectre de la turbulence extérieure se trouve amplifié dans la couche limite et comment il se développe lors du déclenchement de la transition. Des efforts systématiques devront être consacrés tant sur le plan expérimental que sur le plan théorique à des analyses spectrales, afin d'éclairer et ensuite de prévoir, le rôle que doit jouer la distribution en fréquences de l'énergie des fluctuations qui produisent la transition.

#### REFERENCES

- (1) - PRETSCH  
Calculation of the limit of stability of boundary layer profiles and of the amplification of disturbances.  
(A.V.A. Monographs, British R.T. 1004, 1948).
- (2) - MICHEL R.  
Détermination du point de transition et calcul de la traînée des profils d'ailes en incompressible.  
(La Recherche Aéronautique N° 24, 1951).
- (3) - CEBECI T. - MOSINSKIS G.J. - SMITH A.M.O.  
Calculation of viscous drag and turbulent boundary-layer separation on two-dimensional and axisymmetric bodies in incompressible flows.  
(Rept. MDC J 0973-01, 1970, Douglas Aircraft Co.).
- (4) - SMITH A.M.O. - GAMBERONI N.  
Transition, pressure gradient and stability theory.  
(Rept. ES 26388, 1956, Douglas Aircraft Co.).
- (5) - VAN INGEN J.L.  
A suggested semi-empirical method for the calculation of the boundary-layer transition region.  
(Rept. V.T.H. 74, Delft, 1956).
- (6) - GRANVILLE P.S.  
The calculation of the viscous drag of bodies of revolution.  
(David Taylor Model Basin Report 849, 1953).
- (7) - CRABTREE L.F.  
Prediction of transition in the boundary layer of an aerofoil.  
(Journal of Aeronautical Society, Vol. 62, P. 525, 1958).
- (8) - EPPLER R.  
Laminar Profile für Reynolds-Zahlen grosser als  $4 \cdot 10^6$ .  
(Ingenieur-Archiv, Vol. 38, P. 232, 1969).
- (9) - THIEDE P.  
Theoretische Untersuchungen zur Laminarhaltung der Grenzschicht in Rotationskörpern durch Absaugeschlitze bei inkompressible Strömung.  
(Fortschritt-Berichte der CDI Zeitschriften, Series 7, N° 27, 1970).
- (10) - HALL D.J. - GIBBINGS J.C.  
Influence of free-stream turbulence and pressure gradient upon boundary-layer transition.  
(Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 14, N° 2, 1972).
- (11) - DUNHAM J.  
Predictions of boundary-layer transition on turbomachinery blades.  
(AGARD Meeting, Boundary Layers in Turbomachines, PARIS, 1972).

- (12) - DRYDEN H.L.  
Transition from laminar to turbulent flow at subsonic and supersonic speeds.  
(Conference on High-Speeds Aeronautics, Brooklyn 1955).
- (13) - FEINDT E.G.  
Untersuchungen über die Abhängigkeit des Umschlages Laminar-Turbulent von der Oberflächenrauigkeit und der Druckverteilung.  
(Jb. 1956 der Schiffbautechn. Gesellschaft, 50, P. 187, 1957).
- (14) - ARNAL D. - JUILLEN J.C.  
Recherches expérimentales sur la transition de la couche limite en incompressible.  
(13ème Colloque AAAF d'Aérodynamique Appliquée, LYON, Novembre 1976).
- (15) - SCHUBAUER G.B. - KLEBANOFF P.S.  
Contributions on the mechanics of boundary-layer transition.  
(NACA Report 1289, 1956).
- (16) - CEBECI T.  
Wall curvature and transition effects in turbulent boundary-layers.  
(AIAA Journal, Vol. 9, N° 9, Septembre 1971).
- (17) - MICHEL R.  
Tentative prediction of the boundary-layer development in a transition region.  
(Rand Corporation Low Speed Boundary Layer Transition Workshop, Santa-Monica, July 1974).
- (18) - ROTTA J.C.  
Turbulent boundary-layers in incompressible flow.  
(Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 2, 1962).
- (19) - COUSTEIX J.  
Progrès dans les méthodes de calcul des couches limites bi et tri-dimensionnelles.  
(13ème Colloque AAAF d'Aérodynamique Appliquée, LYON, Novembre 1976).
- (20) - BECKWITH I.E. - PUSHNELL D.M.  
Calculation of mean and fluctuating properties of the incompressible turbulent boundary layer.  
(AFOSR - IFP - Stanford, 1968 - Conference on turbulent boundary layer prediction, Vol. 1).
- (21) - HANJALIC K. - LAUNDER B.E.  
A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows.  
(J. Fluid. Mech. 52, P. 609, 1972).
- (22) - JONES W.P. - LAUNDER B.E.  
The prediction of laminarization with a two-equations model of turbulence.  
(Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 15, N° 2, P. 301).
- (23) - SAFFMAN P.G. - WILCOX D.C.  
Turbulence model predictions for turbulent boundary layers.  
(AIAA Journal, Vol. 12, N° 4, P. 541, 1974).
- (24) - WILCOX D.C.  
Turbulence model transition predictions : effects of surface roughness and pressure gradient.  
(AIAA Paper N° 75-857 ; 8 th Fluid and Plasma Conference, HARTFORD, Juin 1975).
- (25) - Mc. DONALD H. - FISH R.W.  
Practical calculations of transitional boundary layers.  
(AGARDograph N° 164, Boundary Layer in Turbomachines, 1972).
- (26) - MARI C. - MATHIEU J.  
Méthode de prédiction de la transition de la couche limite.  
(Communication proposée au "Symposium on Laminar-Turbulent Transition", AGARD, Mai 1977).
- (27) - VAN DER EGGE ZIJNEN B.G.  
Measurement of the velocity distribution in the boundary layer along a plane surface.  
(Aer. Lab. Tech. H.S. Delft, Rep. N° 6, 1924).
- (28) - TURNER A.B.  
Local heat transfer measurements on a gas turbine blade.  
(J. Mech. Eng. Sci., Vol. 13, N° 1, 1971).
- (29) - SPANGLER J.G. - WELLS C.S.  
Effects of freestream disturbances on boundary layer transition.  
(AIAA Journal, Vol. 6, P. 543 - 1968).

**C E D O C A R**

Ce document peut être obtenu :

- sur place,

à la Régie de Documentation Technique, 2, Avenue de la Porte d'Issy - 75015  
PARIS

- ou par correspondance adressée,

à la Section des Diffusions du CEDOCAR, 26, Boulevard Victor - 75996 PARIS  
ARMEES aux conditions suivantes :

- pour la France et le Marché Commun : 15<sup>F</sup>

- pour l'Etranger : 19<sup>F</sup>

paiement d'avance, par virement au C.C.P. 90 80 55 PARIS, ou par chèque bancaire  
payable à PARIS

Dépôt légal 1er trimestre 1977 - n° II204

ISEN 2-7170-0420-3